

请考生用钢笔或圆珠笔作答

## 高三年级学情检测

# 数学试题

本试卷共 4 页, 22 题, 全卷满分 150 分, 考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数  $z = i(1+i)$ , 其中  $i$  是虚数单位, 则  $\bar{z}$  在复平面内所对应的点在

- A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限

2. 已知集合  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $\{1, 2\}$       B.  $\{0, 1, 2\}$       C.  $\{-1, 0, 1, 2\}$       D.  $[0, 2]$

3. 已知向量  $a, b$  满足  $|a| = |b| = 1$ ,  $|a + 2b| = \sqrt{3}$ , 则向量  $a, b$  的夹角为

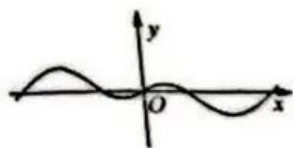
- A.  $30^\circ$       B.  $60^\circ$       C.  $120^\circ$       D.  $150^\circ$

4. “ $x > y$ ”的一个充分条件可以是

- A.  $2^{x-y} > \frac{1}{2}$       B.  $x^2 > y^2$       C.  $\frac{x}{y} > 1$       D.  $xt^2 > yt^2$

5. 右图是函数  $f(x)$  的部分图象, 则它的解析式可能是

- A.  $f(x) = \frac{x \cdot \sin x}{e^x + e^{-x}}$       B.  $f(x) = \frac{x \cdot \sin x}{e^x - e^{-x}}$
- C.  $f(x) = (1 - \frac{2}{e^x + 1}) \cos x$       D.  $f(x) = (e^x - e^{-x}) \cos x$



6. 已知  $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3} + \cos \alpha$ , 则  $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{6}) =$

- A.  $-\frac{7}{9}$       B.  $\frac{7}{9}$       C.  $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$       D.  $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

高三数学试题 第 1 页 (共 4 页)

7. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 其前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_n < 0$  对任意的  $n \in \mathbb{N}$  恒成立, 则  $q$  的取值范围是

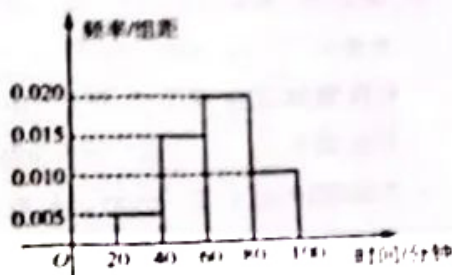
- A.  $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$                       B.  $(-1, 0) \cup (0, 1)$   
C.  $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$               D.  $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$

8. 已知  $a = 6^{64}$ ,  $b = 7^{64}$ ,  $c = 8^{64}$ , 则

- A.  $a > b > c$       B.  $a > c > b$       C.  $b > c > a$       D.  $c > b > a$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 居家学习期间, 某学校发起了“畅读经典, 欢度新年”活动, 根据统计数据可知, 该校共有 1 200 名学生, 所有学生每天读书时间均在 20 分钟到 100 分钟之间, 他们的日阅读时间频率分布直方图如图所示, 则下列结论正确的是



- A. 该校学生日阅读时间的众数约为 70  
B. 该校学生日阅读时间不低于 60 分钟的人数约为 360  
C. 该校学生日阅读时间的第 50 百分位数约为 65  
D. 该校学生日阅读时间的平均数约为 64

10. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$  ( $\omega > 0$ ) 满足  $f(x) \leq f(\frac{2\pi}{3})$  恒成立, 且在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递增, 则下列说法中正确的是

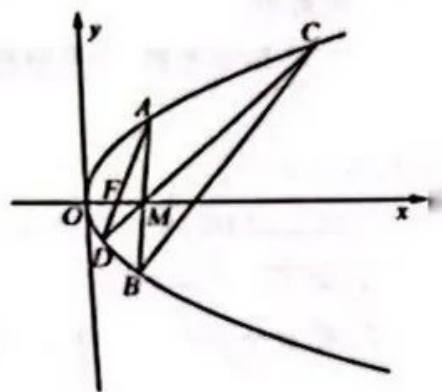
A.  $\omega = \frac{1}{2}$

B.  $f(x + \frac{2\pi}{3})$  为偶函数

C. 若  $x \in [0, \pi]$ , 则  $f(x) \in [\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$

D. 将  $f(x)$  图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍, 可以得到  $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$  的图象

11. 如图所示, 抛物线  $E: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点为  $F$ , 过点  $M(p, 0)$  的直线  $l_1, l_2$  与  $E$  分别相交于  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  和  $C, D$  两点, 直线  $AD$  经过点  $F$ , 当直线  $AB$  垂直于  $x$  轴时,  $|AF| = 3$ . 下列结论正确的是



A.  $E$  的方程为  $y^2 = 4x$

B.  $y_1 y_2 = -12$

C. 若  $AD, BC$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 则  $k_1 = 3k_2$

D. 若  $AD, BC$  的倾斜角分别为  $\alpha, \beta$ , 则  $\tan(\alpha - \beta)$  的最大值为  $\frac{\sqrt{2}}{4}$



12. 在平面四边形  $ABCD$  中,  $AD \perp CD$ ,  $AD=CD=2$ ,  $AB=1$ ,  $BC=\sqrt{5}$ , 沿  $AC$  将  $\triangle ABC$  折起, 使得点  $B$  到达点  $B'$  的位置, 得到三棱锥  $B'-ACD$ , 则下列说法正确的是

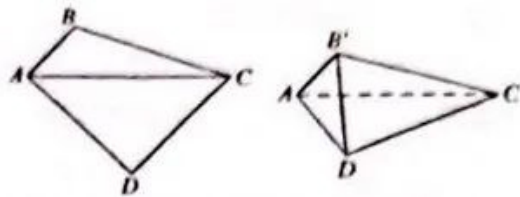
A. 三棱锥  $B'-ACD$  体积的最大值为  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

B.  $\vec{AC} \cdot \vec{B'D}$  为定值

C. 直线  $AC$  与  $B'D$  所成角的余弦值的取值范围

为  $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

D. 对任意点  $B'$ , 线段  $AD$  上必存在点  $N$ , 使得  $CN \perp B'D$



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 为推动黄河流域生态保护和高质量发展, 某市环保局派出 4 个宣传小组, 到黄河沿岸 5 个社区做环保宣讲活动, 每个小组至少去 1 个社区, 每个社区只安排 1 个小组, 则不同的安排方法共有 \_\_\_\_\_ 种(用数字作答).

14. 已知圆锥侧面展开图的周长为  $4+2\pi$ , 面积为  $2\pi$ , 则该圆锥的体积为 \_\_\_\_\_.

15. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2x+a, & x \leq 0, \\ x \ln x, & x > 0, \end{cases}$  若方程  $f(x) = m (m > 0)$  有两个不同的实数根  $x_1$ ,

$x_2$ , 且  $|x_1 - x_2| \leq e$ , 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

16. 已知  $F_1, F_2$  分别为椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的左、右焦点, 以  $F_2$  为圆心且过椭圆左顶点的圆与直线  $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$  相切.  $P$  为椭圆上一点,  $I$  为  $\triangle PF_1F_2$  的内心, 且  $S_{\triangle IPF_1} = \lambda S_{\triangle IPF_2} - S_{\triangle IPF_1}$ , 则  $\lambda$  的值为 \_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

甲、乙两人进行抛掷骰子游戏, 两人轮流抛掷一枚质地均匀的骰子, 规定: 先掷出点数 6 的获胜, 游戏结束.

(1) 记两人抛掷骰子的总次数为  $X$ , 若每人最多抛掷两次骰子, 求比赛结束时,  $X$  的分布列和期望;

(2) 已知甲先掷, 求甲恰好抛掷  $n$  次骰子并获得胜利的概率.

18. (12 分)

已知  $\triangle ABC$  中,  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $(a+b)(\sin A - \sin B) = b \sin C$ .

(1) 证明:  $A = 2B$ ;

(2) 若  $a = 3, b = 2$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

19.(12分)

各项均为正数的数列  $\{a_n\}$ , 其前  $n$  项和记为  $S_n$ , 且满足对  $\forall n \in \mathbb{N}_+$ , 都有  $2S_n = a_n^2 + a_n$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $T_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$ , 证明:  $T_n < \frac{7}{4}$ .

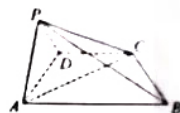
20.(12分)

在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是直角梯形,  $AB \parallel CD$ ,  $AB \perp AD$ , 侧面  $PAD \perp$

底面  $ABCD$ ,  $DP = DA = DC = \frac{1}{2}AB$ .

(1) 证明: 平面  $PBC \perp$  平面  $PAB$ ;

(2) 若  $AD = AP$ , 求平面  $PAC$  与平面  $PAB$  夹角的余弦值.



21.(12分)

已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的实轴长为 2, 直线  $y = \sqrt{3}x$  为  $C$  的一条渐近线.

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 若过点  $(2, 0)$  的直线与  $C$  交于  $P, Q$  两点, 在  $x$  轴上是否存在定点  $M$ , 使得  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$  为定值? 若存在, 求出点  $M$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.

22.(12分)

已知函数  $f(x) = \sin 2x - \ln(1+x)$ ,  $f'(x)$  为  $f(x)$  的导数.

(1) 证明:  $f'(x)$  在区间  $(-1, \frac{\pi}{4})$  上存在唯一的极大值点;

(2) 讨论  $f(x)$  零点的个数.



## 高三年级学情检测

### 数学试题参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	C	D	C	B	D	A

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	ACD	AB	AD	ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 240; 14.  $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$  或  $\frac{4\sqrt{\pi^4-4}}{3\pi^2}$ ; 15.  $(0, e]$ ; 16.  $\frac{3}{2}$ .

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 【解析】

(1)  $X$  的所有可能取值为：1, 2, 3, 4,

$$\text{则 } P(X=1) = \frac{1}{6}, \quad P(X=2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36},$$

$$P(X=3) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}, \quad P(X=4) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216};$$

所以  $X$  的分布列为

$X$	1	2	3	4
$p$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{125}{216}$

所以  $X$  的数学期望为

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{5}{36} + 3 \times \frac{25}{216} + 4 \times \frac{125}{216} = \frac{671}{216}.$$

(2) 设事件“甲掷第  $n$  次且不获胜”的概率为  $a_n$ ,

$$\text{由题可知: } a_1 = \frac{5}{6}, \quad \text{且 } a_n = a_{n-1} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36} a_{n-1} (n \geq 2),$$

所以数列  $\{a_n\}$  是以  $\frac{5}{6}$  为首项,  $\frac{25}{36}$  为公比的等比数列, 则  $a_n = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}$ ,

所以甲恰好抛掷第  $n$  次且赢得比赛的概率  $P_n = a_{n-1} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}$ ,

当  $n=1$  时符合, 所以  $P_n = \frac{1}{6} \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}$ .

18. 【解析】

(1) 因为  $(a+b)(\sin A - \sin B) = b \sin C$ , 由正弦定理得:  $a^2 - b^2 = bc$ ,

$$\text{所以 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{c^2 - bc}{2bc} = \frac{c-b}{2b} = \frac{\sin C - \sin B}{2 \sin B},$$

$$\text{所以 } 2 \cos A \sin B = \sin C - \sin B = \sin(A+B) - \sin B = \sin A \cos B + \sin B \cos A - \sin B,$$

$$\text{所以 } \sin B = \sin A \cos B - \sin B \cos A = \sin(A-B),$$

因为  $0 < B < \pi, -\pi < A-B < \pi$ ,

所以  $B = A-B$ , 或  $B+(A-B) = \pi$  (不合题意),

所以  $A = 2B$ .

(2) 由正弦定理得:  $\frac{2}{\sin B} = \frac{3}{\sin A}$ ,

又因为  $\sin A = \sin 2B = 2 \sin B \cos B$ ,

$$\text{所以 } \frac{2}{\sin B} = \frac{3}{2 \sin B \cos B}, \text{ 所以 } \cos B = \frac{3}{4}, \sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

因为  $a=3, b=2$ , 由 (1)  $a^2 - b^2 = bc$  可得:  $c = \frac{5}{2}$ ,

$$\text{所以 } S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{15\sqrt{7}}{16};$$

即  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{15\sqrt{7}}{16}$ .

19. 【解析】

(1) 因为  $2S_n = a_n^2 + a_n$ , 当  $n \geq 2$  时,  $2S_{n-1} = a_{n-1}^2 + a_{n-1}$ ,

$$\text{作差得 } 2a_n = a_n^2 - a_{n-1}^2 + a_n - a_{n-1}, \text{ 整理得 } a_n + a_{n-1} = (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1}),$$

因为  $a_n > 0$ , 所以  $a_n - a_{n-1} = 1$ ;

当  $n=1$  时,  $2a_1 = a_1^2 + a_1$ , 因为  $a_1 > 0$ , 所以  $a_1 = 1$ ;

所以数列  $\{a_n\}$  是首项为 1 公差为 1 的等差数列,

所以  $a_n = n$ .

$$(2) \text{ 由题意可知 } T_n = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$\text{因为 } \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) (n \geq 2),$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } T_1 = 1 < \frac{7}{4};$$

$$\begin{aligned} \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } T_n &\leq 1 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) < \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

得证.

#### 20. 【解析】

(1) 取  $M, N$  分别为棱  $PA, PB$  的中点, 连接  $DM, MN, NC$ ,

则  $MN \parallel AB$ ,  $MN = \frac{1}{2} AB$ ; 因为  $CD \parallel AB$ , 且  $CD = \frac{1}{2} AB$ ,

所以  $MN \parallel CD$ , 且  $MN = CD$ ,

所以 四边形  $MNCD$  为平行四边形, 故  $DM \parallel CN$ .

因为  $DP = DA$ ,  $M$  为棱  $PA$  的中点, 所以  $DM \perp PA$ ;

因为  $AB \perp AD$ , 平面  $PAD \perp$  底面  $ABCD$ , 平面  $PAD \cap$  底面  $ABCD = AD$ ,

所以  $AB \perp$  平面  $PAD$ , 因为  $DM \subset$  平面  $PAD$ , 所以  $AB \perp DM$ ;

又  $AB \cap PA = A$ , 所以  $DM \perp$  平面  $PAB$ .

因为  $DM \parallel CN$ , 所以  $CN \perp$  平面  $PAB$ ,

又因为  $CN \subset$  平面  $PBC$ , 所以 平面  $PBC \perp$  平面  $PAB$ .

(2) 取  $AD$  中点为  $O$ , 连接  $PO$ , 因为  $\triangle PAD$  为等边三角形, 所以  $PO \perp AD$ ,

因为 平面  $PAD \perp$  底面  $ABCD$ , 所以  $PO \perp$  底面  $ABCD$ , 过  $O$  作  $OE \parallel AB$ , 交  $BC$

于点  $E$ , 则  $OE \perp AD$ ; 以  $O$  为原点,  $OA, OE, OP$  所在直线分别为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴建立空间直角坐标系, 设  $AD = 2$ ,

$$\text{则 } P(0, 0, \sqrt{3}), A(1, 0, 0), D(-1, 0, 0), C(-1, 2, 0), M\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{DM} = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{AP} = (-1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0),$$

由(1)可知  $DM \perp$  平面  $PAB$ , 故 平面  $PAB$  的法向量取  $\overrightarrow{DM} = (\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,

设平面  $PAC$  的法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ,

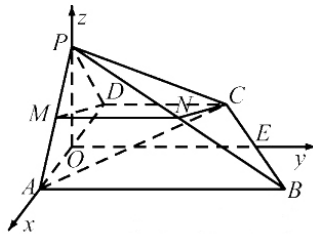
$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} -x + \sqrt{3}z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases},$$

令  $x = \sqrt{3}$ , 得  $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$ ,

设平面  $PAC$  与平面  $PAB$  的夹角为  $\theta$ ,

$$\text{所以 } \cos \theta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DM}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{DM}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7},$$

所以 平面  $PAC$  与平面  $PAB$  夹角的余弦值为  $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ .



21. 【解析】

(1) 由题意知:  $2a = 2, \frac{b}{a} = \sqrt{3}$ , 解得  $a = 1, b = \sqrt{3}$ ,

所以 双曲线 C 的方程为  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ .

(2) 设直线  $PQ$  的方程为  $x = my + 2$ , 与  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  联立可得

$$(3m^2 - 1)y^2 + 12my + 9 = 0, \text{ 设 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2),$$

$$\text{则 } 3m^2 - 1 \neq 0, \Delta = 36m^2 + 36 > 0, y_1 + y_2 = \frac{-12m}{3m^2 - 1}, y_1 y_2 = \frac{9}{3m^2 - 1};$$

假设  $x$  轴上存在定点  $M(t, 0)$ , 使得  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$  为定值.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} &= (x_1 - t)(x_2 - t) + y_1 y_2 = (m^2 + 1)y_1 y_2 + (2 - t)m(y_1 + y_2) + (2 - t)^2 \\ &= \frac{(12t - 15)m^2 + 9}{3m^2 - 1} + (2 - t)^2, \end{aligned}$$

$$\text{若 } \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} \text{ 为定值, 则必有 } \frac{12t - 15}{3} = \frac{9}{-1},$$

解得  $t = -1$ , 此时  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$ ;

若直线  $PQ$  斜率为 0, 则  $P(-1, 0), Q(1, 0)$ ,

$$\text{所以 } \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = (0, 0) \cdot (2, 0) = 0.$$

所以  $x$  轴上存在定点  $M(-1, 0)$ , 使得  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$  为定值 0.

22. 【解析】



- (1) 由题意可知  $f'(x) = 2\cos 2x - \frac{1}{1+x}$ ,  $f''(x) = -4\sin 2x + \frac{1}{(1+x)^2}$ ,
- 当  $x \in (-1, 0)$  时,  $-4\sin 2x > 0$ ,  $\frac{1}{(1+x)^2} > 0$ ,
- 故  $f''(x) > 0$ , 所以  $f'(x)$  在区间  $(-1, 0)$  上单调递增,  $f'(x)$  无极值点.
- 当  $x \in (0, \frac{\pi}{4})$  时,  $f''(x)$  单调递减.  $f''(0) = 1 > 0$ ,  $f''(\frac{\pi}{4}) = -4 + \frac{1}{(1+\frac{\pi}{4})^2} < 0$ ,
- 所以 存在唯一的  $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ ,  $f''(x_0) = 0$ , 且  $x \in (0, x_0)$  时,  $f''(x) > 0$ ,
- 当  $x \in (x_0, \frac{\pi}{4})$  时,  $f''(x) < 0$ , 故  $x = x_0$  为  $f'(x)$  的唯一极大值点.
- 所以  $f'(x)$  在区间  $(-1, \frac{\pi}{4})$  上存在唯一的极大值点.
- (2) 当  $x \in [\pi, +\infty)$  时,  $\sin 2x \leq 1$ ,  $\ln(1+x) > 1$ , 则  $f(x) < 0$  恒成立, 故  $f(x)$  无零点;
- 当  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$  时,  $\sin 2x \leq 0$ ,  $\ln(1+x) > 0$ , 则  $f(x) < 0$  恒成立, 故  $f(x)$  无零点;
- 当  $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$  时,  $\cos 2x \leq 0$ ,  $\frac{1}{1+x} > 0$ , 则  $f'(x) < 0$  恒成立,
- 故  $f(x)$  单调递减, 因为  $f(\frac{\pi}{4}) = 1 - \ln(1 + \frac{\pi}{4}) > 0$ ,  $f(\frac{\pi}{2}) = -\ln(1 + \frac{\pi}{2}) < 0$ ,
- 所以  $f(x)$  在该区间内有唯一零点;
- 当  $x \in (-1, 0]$  时, 注意到  $f(0) = 0$ , 故  $0$  是  $f(x)$  的一个零点;
- 由 (1) 知,  $f'(x)$  在  $(-1, 0)$  上单调递增,
- 因为  $f'(-\frac{2}{3}) = 2\cos \frac{4}{3} - 3 < 0$ ,  $f'(0) = 1 > 0$ ,
- 所以 存在唯一的  $x_1 \in (-1, 0)$ ,  $f'(x_1) = 0$ ,
- 当  $x \in (-1, x_1)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减,
- 当  $x \in (x_1, 0)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增;
- 因为  $f(0) = 0$ , 所以  $f(x_1) < 0$ , 又  $f(-\frac{2}{3}) = -\sin \frac{4}{3} + \ln 3 > 0$ ,
- 故在区间  $(-1, x_1)$  上有唯一零点,  $(x_1, 0)$  上无零点;
- 当  $x \in (0, \frac{\pi}{4})$  时, 由 (1) 可知,
- $f'(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递增, 在  $(x_0, \frac{\pi}{4})$  上单调递减,

因为  $f'(0)=1>0$ ,  $f'(\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{1+\frac{\pi}{4}}<0$ ,

所以 存在唯一的  $x_2 \in (0, \frac{\pi}{4})$ ,  $f'(x_2)=0$ ,

当  $x \in (0, x_2)$  时,  $f'(x)>0$ ,  $f(x)$  单调递增,

当  $x \in (x_2, \frac{\pi}{4})$  时,  $f'(x)<0$ ,  $f(x)$  单调递减;

因为  $f(0)=0$ ,  $f(\frac{\pi}{4})=1-\ln(1+\frac{\pi}{4})>0$ ,

所以  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{4})$  上无零点;

综上所述  $f(x)$  共有 3 个零点.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线



微

