德阳市高中2020级“三诊”试题

数学参考答案与评分标准

（文史类）

一、选择题(每小题5分,共60分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	C	A	D	B	B	D	B	C	A	C

二、填空题(每小题5分,共20分)

13. $\frac{1}{4}$　　14. 8　　15. $3\sqrt{3}$　　16. 2.

三、解答题

17. 解:(1) 设数列$\{a_n\}$的公差为d

$\because a_2+a_4+a_6=21$　　$\therefore a_4=7$

由$a_4=a_2+2d$得:$7=3+2d$

$\therefore d=2$　　$\therefore a_1=1$

$\therefore a_n=2n-1$. ………………………………………………………… 4分

又$S_n+b_n=2$　　$\therefore S_{n+1}+b_{n+1}=2$

$\therefore 2b_{n+1}-b_n=0$,即$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$

$\because b_1+b_1=2$　　$\therefore b_1=1$

$\therefore$ 数列$\{b_n\}$为首项是1,公比是$\frac{1}{2}$的等比数列

$\therefore b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. ………………………………………………………… 8分

(2) 由题意知$c_n=2n-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

于是$T_n=\frac{n(1+2n-1)}{2}+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=n^2+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ……………… 12分

18.解：(1) 由题意可知，绝对学困生有$(0.25+0.50+0.75)\times0.2\times100=30$人

"亟待帮助生"共有$0.25\times0.2\times100=5$人

学困指标的平均值为：$(0.25\times0.1+0.5\times0.3+0.75\times0.5+2\times0.7+1.5\times0.9)\times0.2=0.66$. ………………………………………… 5分

(2) 学困指标在$[0,0.4)$内的学困生共有

$(0.25+0.50)\times0.2\times100=15$人 ………………………………………… 7分

依题意得指标在$[0,0.2)$中抽取了2人，分别设为A,B；指标在$[0.2,0.4)$中抽取了4人，分别设为C,D,E,F.

从中选2人，所有可能结果如下：$AB,AC,AD,AE,AF,BC,BD,BE,BF,CD,CE,CF,DE,DF,EF$共15种不同结果；其中恰从指标在$[0,0.2)$和$[0.2,0.4)$各选一人的结果有8个不同结果.

故所求概率为$P=\frac{8}{15}$. ………………………………………… 12分

19.△PDA沿PD翻折中不会改变二面角$C-BA'-P$的大小，其大小为$90°$.

(1) 证明：$\because PD\parallel BC,\angle B=90°$ $\quad\therefore A'P\perp PD$

$\therefore A'P\perp BC$

$\because CB\perp PB,A'P\cap PB=P$.

$\therefore CB\perp$平面$A'PB$

$\because CB\subset$平面$A'CB$

$\therefore$平面$A'CB\perp$平面$A'PB$.故二面角$C-BA'-P$的大小为定值$90°$.

………………………………………… 4分

(2) 解：设$A'B$的中点为F，连接EF，PF.

$\because E$为$A'C$的中点 $\quad\therefore EF\parallel BC$且$CB=2EF$.

$\because PD\parallel BC$且$CB=2PD$ $\quad\therefore EF\parallel PD$且$PD=EF$

$\therefore$四边形$PDEF$为平行四边形.

$\therefore ED\parallel PF$

而$PF\subset$平面$A'PB$，$ED\not\subset$平面$A'PB$

$\therefore DE\parallel$平面$A'PB$. ………………………………………… 8分

$\because$ 平面 $PDA' \perp$ 平面 $PBCD$，平面 $PDA' \cap$ 平面 $PBCD = PD$，$A'P \perp PD$

$\therefore PA' \perp$ 平面 $PBCD$ ………………………………………………… 10分

由题意 $A'P=2$，四边形 $PBCD$ 为直角梯形

$\therefore V_{A'-PBCD} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{6} \times (2+1) \times 2 \times 2 = 2$. ……………………………… 12分

20. 解：(1) 由题意曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的切线斜率均不小于 2.

$\therefore f'(x) = \ln x + \frac{a}{x} + 1 \geq 2$ 即 $a \geq x - x\ln x$ 在 $x>0$ 时恒成立

设 $F(x) = x - x\ln x$，则 $F'(x) = -\ln x$

由 $F'(x)>0$ 得 $0<x<1$

$\therefore x \in (0,1)$ 时 $F(x)$ 单增，$x \in (1,+\infty)$ 时 $F(x)$ 单减

$\therefore F(x)$ 的最大值为 $F(1)=1$ $\quad\therefore a \geq 1$

$\because a \leq 1$ $\quad\therefore a=1$. ………………………………………………………… 5分

(2) $h(x) = f(x) - g(x) = (x+1)\ln x - \frac{x^2}{e^x}$

当 $x \in (0,1]$ 时，$h(x)<0$

又 $h(2) = 3\ln 2 - \frac{4}{e^2} = \ln 8 - \frac{4}{e^2} > 1 - 1 = 0$

$\therefore$ 存在 $x_0 \in (1,2)$，使 $h(x_0)=0$. ………………………………………… 8分

因为 $h'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 + \frac{x(x-2)}{e^x}$

当 $x \in (1,2)$ 时，$0 < x(2-x) = -(x-1)^2+1 < 1$

$e^x > e$ $\quad\therefore 0 < \frac{1}{e^x} < \frac{1}{e}$ $\quad\therefore \frac{x(2-x)}{e^x} < \frac{1}{e}$

$\therefore h'(x) > 1 - \frac{1}{e} > 0$

$\therefore$ 当 $x \in (1,2)$ 时 $h(x)$ 单调递增

$\therefore$ 函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在 $(1,2)$ 内存在唯一的零点. ………… 12分

21. 解：(1) 由 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 得：$a=2b$，$c=\sqrt{3}b$

所以 $F_1(-\sqrt{3}b,0)$，$F_2(\sqrt{3}b,0)$，$P(2b,0)$

则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-\sqrt{3}b-2b,0)\cdot(\sqrt{3}b-2b,0)=b^2$

由题意 $b^2=1$.

故所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………………… 4分

(2) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $M(x_1,-y_1)$

由 $\begin{cases} x=ky-1 \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得：$(k^2+4)y^2-2ky-3=0$，$\triangle=16k^2+48>0$

故 $y_1+y_2=\frac{2k}{k^2+4}$，$y_1\cdot y_2=\frac{-3}{k^2+4}$.

经过点 $M(x_1,-y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 的直线方程为 $\frac{y+y_1}{y_2+y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. … 8分

令 $y=0$，则 $x=\frac{x_2-x_1}{y_1+y_2}y_1+x_1=\frac{(x_2-x_1)y_1+(y_1+y_2)x_1}{y_1+y_2}=\frac{x_2y_1+x_1y_2}{y_1+y_2}$

又 $x_1=ky_1-1$，$x_2=ky_2-1$

所以 $x=\frac{x_2y_1+x_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{(ky_2-1)y_1+(ky_1-1)y_2}{y_1+y_2}$ ………………… 10分

$$=\frac{2ky_1y_2-(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=\frac{\frac{-6k}{k^2+4}-\frac{2k}{k^2+4}}{\frac{2k}{k^2+4}}=-4.$$

故直线 MB 与 x 轴交于定点 $(-4,0)$. ………………………………………… 12分

22. 解：(1) 由 $\rho=2\sqrt{5}\sin\theta$，得：$x^2+y^2-2\sqrt{5}y=0$

即 $x^2+(y-\sqrt{5})^2=5$. ………………………………………………………… 3分

(2) 将 l 的参数方程 $\begin{cases} x=3-\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数) 代入圆 C 的直角坐标方程

得：$\left(3-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2=5$，即 $t^2-3\sqrt{2}t+4=0$.

由于 $\Delta=(3\sqrt{2})^2-4\times4=2>0$，故可设 t_1,t_2 是上述方程的两实根

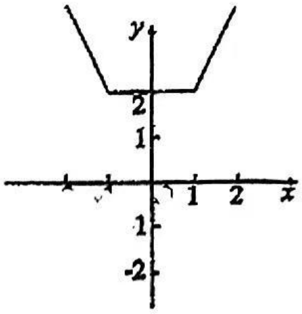
所以 $\begin{cases}t_1+t_2=3\sqrt{2}\\ t_1\cdot t_2=4.\end{cases}$

又直线 l 过点 $P(3,\sqrt{5})$

故由上式及 t 的几何意义得：$|PA|\cdot|PB|=|t_1|\cdot|t_2|=|t_1t_2|=4$. …

…………………………………………………………………………………… 10 分

23. 解：(1) 当 $a=-1$ 时，$f(x)=|x-1|+|x+1|$



$$f(x)=\begin{cases}-2x,x<-1\\2,-1\leqslant x\leqslant1\\2x,x>1.\end{cases}$$

作出函数 $f(x)=|x-1|+|x+1|$ 的图象.

由图象可知，不等式的解集为

$\left\{x\,\middle|\,x\leqslant-\dfrac{3}{2}\text{或}x\geqslant\dfrac{3}{2}\right\}$. ……………………………………………………………… 5 分

(2) 若 $a=1$，$f(x)=2|x-1|$，不满足题设条件；

若 $a<1$，$f(x)=\begin{cases}-2x+a+1,x\leqslant a\\1-a,a<x<1\\2x-(a+1),x\geqslant1\end{cases}$

$f(x)$ 的最小值为 $1-a$.

∴ 对于 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant2$ 的充要条件是 $1-a\geqslant2$　∴$a\leqslant-1$

∴a 的取值范围是 $(-\infty,-1]$. ……………………………………………………… 10 分