

中学生标准学术能力诊断性测试 2018年 2 月测试

数学理科试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{1}{81} < 3_{x-1} \leq 3\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x+2}{x-3} < 0\}$ , 则集合

$\{z \mid z = xy, x \in A, y \in B\}$  的元素个数为

A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

2. 设随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(1, \sigma^2)$ , 若  $P(\xi < -1) = 0.2$ , 则函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \xi^2 x$  有极值点的概率是

A. 0.2 B. 0.7 C. 0.3 D. 0.8

3. 下列命题中：

(1) “ $x > 1$ ” 是 “ $x^2 > 1$ ” 的充分不必要条件

(2) 命题 “若  $a, b$  都是奇数，则  $a + b$  是偶数” 的逆否命题是 “若  $a + b$  不是偶数，则  $a, b$  都不是奇数”

(3) 命题 “ $\forall x > 0$ , 都有  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ” 的否定是 “ $\exists x_0 > 0$ , 使得  $x_0 + \frac{1}{x_0} < 2$ ”

(4) 已知  $p, q$  为简单命题，若  $\neg p$  是假命题，则  $p \wedge q$  是真命题。正确命题的个数为

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

4. 设  $\{a_n\}$  是公差为 2 的等差数列， $b_n = a_{2n}$ , 若  $\{b_n\}$  为等比数列，其前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $S_n$  为

A.  $2(2^n - 1)$  B.  $2(2^{n+1} - 1)$  C.  $4(2^n - 1)$  D.  $4(2^{n+1} - 1)$

5. 若函数  $f(x) = e^x - a$ , ( $e$  为自然数的底数), 对任意实数  $x$ ,  $f(x) \geq -f(-x)$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是

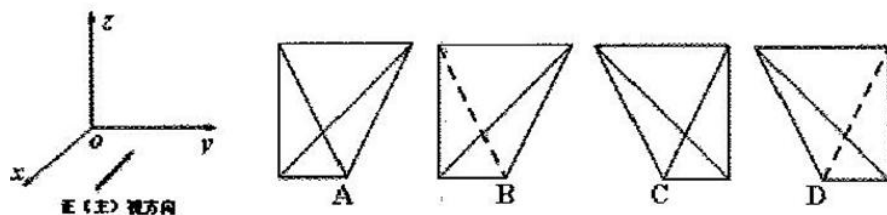
A.  $(-\infty, 1]$  B.  $(1, +\infty)$  C.  $(e, -\infty)$  D.  $[1, +\infty)$

6. 设  $(x^2 - 3x + 2)^5 = a_0x + a_1x + a_2x_2 + \dots + a_{10}x_{10}$ , 则  $a_1$  等于

A. -240      B. -120      C. 240      D. 120

7. 一个四面体的顶点在空间直角坐标系  $O-xyz$  中的坐标分别是  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,

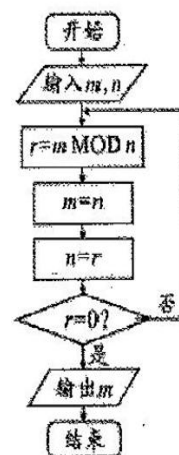
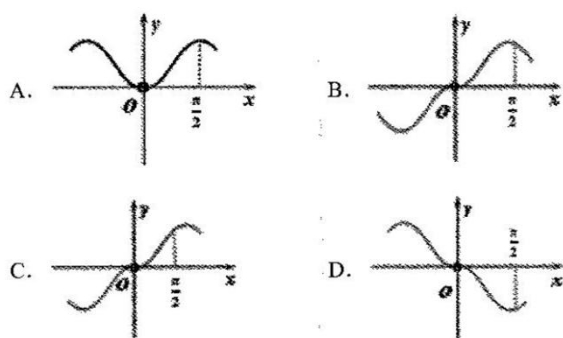
$(\frac{1}{2}, 1, 0)$ , 绘制该四面体三视图时, 按照如下图所示的方向画正视图, 则得到左视图可以为



8. 如图所示, 程序框图的算法思路源于数学名著《几何原本》中的“辗转相除法”, 执行该程序框图 (图中 “ $m \text{ MOD } n$ ” 表示  $m$  所除以  $n$  的余数), 若输入的  $m, n$  分别为 2016, 612, 则输出的  $m$  =

A. 0      B. 72  
C. 36      D. 180

9. 函数  $y = \frac{2\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{1 + \frac{1}{x^2}}$  ( $x \in [-\frac{3\pi}{4}, 0) \cup (0, \frac{3\pi}{4}]$ ) 的图像大致是



10. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$ , 过焦点  $F$  且斜率为  $\sqrt{3}$  的直线与  $C$  相交于  $P, Q$  两点, 且  $P, Q$

两点在准线上的投影分别为 M, N 两点, 则  $S_{\triangle MFN} =$

- A.  $\frac{8}{3}p^2$  B.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}p^2$  C.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}p^2$  D.  $\frac{8\sqrt{3}}{3}p^2$

11. 已知函数  $f(x) = x^2 - mx$  的图象在点  $x = 1$  处的切线  $l$  与直线

$x + 3y - 2 = 0$  垂直, 记数列  $\{\frac{1}{f(n)}\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $S_{2018}$  的值为

12. 已知函数  $f(x) = (\frac{\ln x}{x})^2 + (a-1)\frac{\ln x}{x} + 1 - a$  有三个不同的零点  $x_1, x_2, x_3$  (其中  $x_1 < x_2 < x_3$ ),

则  $(1 - \frac{\ln x_1}{x_1})(1 - \frac{\ln x_2}{x_2})(1 - \frac{\ln x_3}{x_3})$  的值为

- A. 1 B.  $a-1$  C.  $-1$  D.  $1-a$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13.  $O$  为  $\triangle ABC$  内一点, 且  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ,  $\triangle ABC$  和  $\triangle OBC$  的面积分别是

$\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle ABC}} =$  \_\_\_\_\_。

14. 设实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} x + y - 2 \geq 0 \\ 2x - y - 2 \leq 0 \\ y - 1 \leq 0 \end{cases}$ , 则  $m = \frac{2y+x}{y-2x}$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

15. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的两条渐近线与抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$

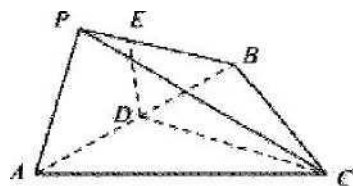
的准线分别交于 A, B 两点,  $O$  为坐标原点, 若双曲线的一条渐近线的倾斜角为  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\triangle AOB$  的面积

为  $4\sqrt{3}$ , 则  $P =$  \_\_\_\_\_。

16. 如图, 三棱锥  $P-ABC$  是边长为 3 的等边三角形,  $D$  是线段  $AB$  中点,  $DE \cap PB = E$ , 且  $DE \perp AB$ , 若

$\angle EDC = 120^\circ$ ,  $PA = \frac{3}{2}$ ,  $PB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ , 则三棱锥  $P-ABC$  的外接球的半

径为\_\_\_\_\_。



三、解答题: 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算

骤，第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17. (12 分)在 $\triangle ABC$  中，角 A, B, C 对应的边分别为 a, b, c, 已知  $c = 2$ ,  $b = 1$ , 且  $\sin^2 A = \sin^2 \frac{B+C}{2}$ .

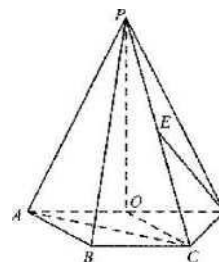
(1)求角 A 的大小和 BC 边的长;

(2)若点 P 在 $\triangle ABC$  内运动(包括边界), 且点 P 到三边的距离之和为 d, 设点 P 到 BC 的距离分别为 x, y, 试用 x, y 表示 d, 并求 d 的最大值和最小值。

18. (12 分)如图, 四棱锥 P - ABCD 中, 底面 ABCD 中,  $BC \parallel AD$ ,  $CD \perp AD$ , P 在底面的射影 O 在 AD 上,  $PA = PD$ , O, E 分别为 AD, PC 的中点, 且  $PO = AD = 2BC = 2CD$ .

(1)求证:  $AB \perp DE$ ;

(2)求二面角 A-PE-O 的余弦值。



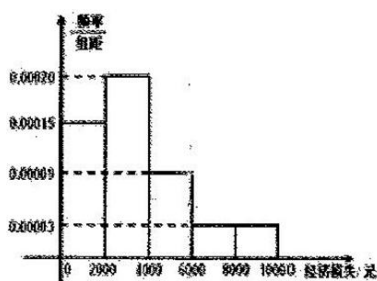
19. (12 分)今年某台风在沿海登陆, 适逢暑假, 小张调查了当地某小区

100 户居民由于台风造成的经济损失, 将收集的数据分成  $(0, 2000]$ ,

$(2000, 4000]$ ,  $(4000, 6000]$ ,  $(6000, 8000]$ ,  $(8000, 10000]$  五组, 并作出如下频率分布直方图(图 1):

(1)台风后居委会号召小区居民为台风重灾区捐款, 小张调查的 100 户居民捐款情况如表格, 在表格空白处填写正确数字, 并说明是否有 95% 以上的把握认为捐款数额多于或少于 500 元和自身经济损失是否到 4000 元有关?

(1)将上述调查所得到的频率视为概率\*现在从该地区大量受灾居民中, 采用随机抽样方法每次抽取 1 户居民, 抽取 3 次, 记被抽取的 3 户居民中自身经济损失超过 4000 元的人数为  $\xi$ . 若每次抽取的结果是相互独立的, 求  $\xi$  的分布列, 期望  $E(\xi)$  和方差  $D(\xi)$ .



(图 1)

|             | 经济损失不超过 4000 元 | 经济损失超过 4000 元 | 合计 |
|-------------|----------------|---------------|----|
| 捐款超过 500 元  | 60             |               |    |
| 捐款不超过 500 元 |                | 10            |    |
| 合计          |                |               |    |

附：临界值表

| $P(K^2 \geq k)$ | 0.10  | 0.05  | 0.025 |
|-----------------|-------|-------|-------|
| $k$             | 2.706 | 3.841 | 5.024 |

$$\text{随机变量: } K^2 = \frac{(a+b+c+d)(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

20. (12 分) 已知椭圆 M:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ , 右焦点为 F, 与直线  $y = \frac{3\sqrt{7}}{7}$  相交于 P、Q 两点,

若椭圆 M 经过点  $(0, \sqrt{3})$  且  $PF \perp QF$ .

(1) 求椭圆 M 的方程;

(2) O 为坐标原点, A、B、C 是椭圆 M 上不同的三点, 并且 O 为  $\triangle ABC$  的重心, 试求  $\triangle ABC$  的面积.

21. (12 分) 已知函数  $f(x) = a \ln \frac{1}{x} + ne^{x-1}, a \in R$ .

(1) 若  $a=1$ , 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若  $\forall x > 0, f(x) \geq f(m)$  恒成立, 且  $f(x) \geq 0$ , 求证:  $f(m) \geq 2m^2(1-m)$ .

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 以坐标原点为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系。半圆 C (圆心为

点 C) 的参数方程为  $\begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = 1 + \sin \varphi \end{cases}$   $\varphi$  为参数,  $\{\varphi \in (0, \pi)\}$ .

(1) 求半圆 C 的极坐标方程;

(2) 若一直线与量坐标轴的交点分别为 A, B, 其中  $A(0, -2)$ , 点 D 在半圆 C 上, 且真线 CD 的倾斜角是直线 AB 倾斜角的 2 倍, 若  $\triangle ABD$  的面积为 4, 点 D 的直角坐标。

23. [选修 4-5 不等式选讲] (10 分)

已知函数  $f(x) = |x+2| - m|x-1|$ .

(1) 若  $m = -2$  时, 解不等式  $f(x) \geq 5$ ;

(2) 若  $f(x) \leq m(x+5)$ , 求 m 的最小值。