衡中同卷 参考答案及解析 高考新版

2022—2023 学年度下学期高三年级二调考试·数学

一、选择题

1. B【解析】因为 $A=\{x\in N^*|x^2-4x<0\}=\{1,2,3\}$，$B=\left\{x\in N^*\left|\frac{8}{x-1}\in N^*\right.\right\}=\{2,3,5,9\}$，所以 $A\cap B=\{2,3\}$，有 2 个元素.

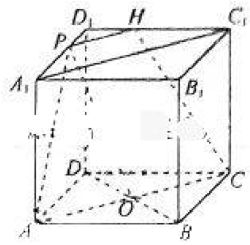
2. A【解析】因为 $0=\log_2 1<\log_2\sqrt{3}<\log_2\sqrt{4}=1$，所以 $0<a<1$. 又 $c=3^{\frac{1}{3}}>3^0=1$，所以 $c>a$. 因为 $b^{15}=(2^{0.6})^{15}=2^9=512$，$c^{15}=(3^{\frac{1}{3}})^{15}=3^5=243$，所以 $b^{15}>c^{15}$，则 $b>c$，故 $a<c<b$.

3. B【解析】由题意知 $\tan\theta_1=2$，$\tan\theta_2=3$，所以 $\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{2-3}{1+2\times3}=-\frac{1}{7}$.

4. D【解析】由函图知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，故排除 A；当 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x^2}$ 时，$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{(-x)^2}=-\frac{e^x-e^{-x}}{x^2}=-f(x)$，则 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x^2}$ 是奇函数，故排除 B；当 $f(x)=\frac{x^2}{e^x-e^{-x}}$ 时，$f(-x)=\frac{(-x)^2}{e^{-x}-e^{x}}=-\frac{x^2}{e^x-e^{-x}}=-f(x)$，则 $f(x)=\frac{x^2}{e^x-e^{-x}}$ 是奇函数，故排除 C.

5. C【解析】对命题 p，因为 $e^{-x}>0$，所以 $e^{-x}+1>1$. 又 $-1\leqslant\sin x\leqslant1$，所以不存在 $x\in R$，使得 $e^{-x}+1=\sin x$ 成立，故命题 p 为假命题. 对命题 q，当 $a=0$，$b<0$ 时，$a|a|>b|b|$ 成立；当 $a>0$，$b\leqslant0$ 时，$a|a|>b|b|$ 成立；当 $a>0$，$b>0$ 时，$a|a|=a^2$，$b|b|=b^2$，因为 $a>b>0$，所以 $a^2>b^2$，所以 $a|a|>b|b|$ 成立；当 $a<0$，$b<0$ 时，$a|a|=-a^2$，$b|b|=-b^2$，因为 $b<a<0$，所以 $-a^2>-b^2$，所以 $a|a|>b|b|$ 成立，故 $a>b$ 是 $a|a|>b|b|$ 成立的充分条件. 当 $a|a|>b|b|$ 时，若满足 $a=0$，$b<0$，可得 $a>b$；若满足 $a>0$，$b\leqslant0$，可得 $a>b$；若满足 $a>0$，$b>0$，则 $a|a|>b|b|\Leftrightarrow a^2>b^2\Leftrightarrow a^2-b^2>0\Leftrightarrow(a+b)(a-b)>0\Leftrightarrow a-b>0$，所以 $a>b$；若满足 $a<0$，$b<0$，则 $a|a|>b|b|\Leftrightarrow a^2<b^2\Leftrightarrow a^2-b^2<0\Leftrightarrow(a-b)(a+b)<0\Leftrightarrow a-b>0$，所以 $a>b$，则 $a>b$ 是 $a|a|>b|b|$ 成立的必要条件. 故若 $a,b\in R$，则 $a>b$ 是 $a|a|>b|b|$ 成立的充要条件，即 q 为真命题.

6. D【解析】因为 $\overrightarrow{A_1P}=2\overrightarrow{PD_1}$，所以 $\overrightarrow{D_1P}=\frac{1}{3}\overrightarrow{D_1A_1}$. 取 D_1C_1 上靠近点 D_1 的三等分点 H，连接 PH，HC，A_1C_1，则 $PH\parallel A_1C_1$. 又 $AC\parallel A_1C_1$，所以 $PH\parallel AC$. 所以点 A,O,C,H,P 共面，即过 A,P,O 三点的平面截正方体所得截面边界为梯形 $ACHP$. 由题可知 $AP=CH=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，$PH=\sqrt{2}$，$AC=3\sqrt{2}$，所以过 A,P,O 三点的平面截正方体所得截面边界的周长为 $2\sqrt{13}+4\sqrt{2}$.

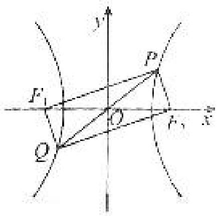


7. C【解析】因为 $e^{2-a}=a>0$，$b(\ln b-1)=e^3$，所以 $2-a=\ln a$，$\ln b+\ln(\ln b-1)=3$，所以 $2-a-\ln a=0$，$2-(\ln b-1)-\ln(\ln b-1)=0$. 令 $f(x)=2-x-\ln x$，则 $f(a)=f(\ln b-1)=0$. 因为 $f'(x)=-1-\frac{1}{x}=-\frac{x+1}{x}<0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $a=\ln b-1$，故 $ab=b(\ln b-1)=e^3$.

8. B【解析】法一：连接 PF_2，QF_2，设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n(m>n>0)$，由题意知 $|OP|=|OQ|=|OF_2|=|OF_1|$，所以四边形 PF_1QF_2 为矩形，所以 $|PF_2|=|QF_1|$. 由 $2|QF_1|\leqslant|PF_1|\leqslant3|QF_1|$，得 $2|PF_2|\leqslant|PF_1|\leqslant3|PF_2|$，即 $2n\leqslant m\leqslant3n$，所以 $2\leqslant\frac{m}{n}\leqslant3$. 由双曲线的定义知 $m-n=2a$ ①；由勾股定理，可得 $m^2+n^2=4c^2$ ②，①式平方与②式相减，得 $-2mn=4a^2-4c^2$，即 $mn=2c^2-2a^2$ ③. 由②③得 $\frac{2c^2}{c^2-a^2}=\frac{m^2+n^2}{mn}=\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$，即 $\frac{2e^2}{e^2-1}=\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$. 令 $x=\frac{m}{n}$，$x\in[2,3]$，$y=x+\frac{1}{x}$，因为 $y=x+\frac{1}{x}$ 在区间 $[2,3]$ 上单调递增，所以 $y\in\left[\frac{5}{2},\frac{10}{3}\right]$，即 $\frac{5}{2}\leqslant\frac{2e^2}{e^2-1}\leqslant\frac{10}{3}$. 又 $e>1$，所以 $\frac{\sqrt{10}}{2}\leqslant e\leqslant\sqrt{5}$，即 C 的离心率的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{10}}{2},\sqrt{5}\right]$.

法二：如图所示，由对称性可知四边形 PF_1QF_2 为平行四边形，因为 $|OP|=|OF_2|=\frac{1}{2}|F_1F_2|$，所以 PF_1

PF_2，所以四边形 PF_1QF_2 为矩形，所以 $|QF_1|=|PF_2|$，由 $2|QF_1|\leqslant|PF_1|\leqslant3|QF_1|$，得 $2|PF_2|\leqslant|PF_1|\leqslant3|PF_2|$，所以 $2\leqslant\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}\leqslant3$. 设 $\angle PF_2F_1=\theta$，则 $\tan\theta=\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}\in[2,3]$，所以 $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\dfrac{\pi}{12}<\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}$. 因为 $|PF_1|=|F_1F_2|\sin\theta=2c\sin\theta$，$|PF_2|=|F_1F_2|\cos\theta=2c\cos\theta$，所以 $|PF_1|-|PF_2|=2c(\sin\theta-\cos\theta)=2a$，所以 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{\sin\theta-\cos\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)}$，则 $y=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 单调递增且恒为正，所以 e 关于 θ 单调递减，当 $\tan\theta=2$ 时，$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，此时 e 取得最大值 $\sqrt{5}$；当 $\tan\theta=3$ 时，$\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，此时 e 取得最小值 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，所以 C 的离心率的取值范围为 $\left[\dfrac{\sqrt{10}}{2},\sqrt{5}\right]$.



二、选择题

9. AD 【解析】$|z_1|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，故 A 正确；由题意知 $\overrightarrow{OZ_1}=(\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{OZ_2}=(x,y)$，若 $\overrightarrow{OZ_1}\parallel\overrightarrow{OZ_2}$，则 $x-\sqrt{3}y=0$，故 B 错误；若 $\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$，则 $\sqrt{3}x+y=0$，即 $y=-\sqrt{3}x$，所以 $z_1z_2=(\sqrt{3}+\mathrm{i})(x+y\mathrm{i})=(\sqrt{3}x-y)+(x+\sqrt{3}y)\mathrm{i}=2\sqrt{3}x-2x\mathrm{i}$，当 $x=0$ 时，$z_1z_2=0$，当 $x\neq0$ 时，$z_1z_2\neq0$，故 C 错误；若 $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$，则 $|(x+y\mathrm{i})-(\sqrt{3}+\mathrm{i})|=\sqrt{3}$，即 $(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=3$，则 $|z_2|$ 表示圆 $(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=3$ 上的点到原点的距离，所以 $|z_2|$ 的最大值为 $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$，故 D 正确.

10. BC 【解析】设样本容量为 8 时的数据为 $x_1,x_2,\cdots,x_8$，样本平均数为 $\bar{x}$，方差为 s^2，则 $\bar{x}=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}x_i=5$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{8}x_i=40$，$s^2=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2)=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}x_i^2-2\bar{x}\times\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}x_i+\dfrac{1}{8}\times8\bar{x}^2=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}x_i^2-2\bar{x}^2+\bar{x}^2=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}x_i^2-\bar{x}^2=2$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{8}x_i^2=8\times(2+\bar{x}^2)=216$. 设增加的数据为 $x_9=4$，增加数据后的样本平均数为 $\overline{X}$，方差为 S^2，则 $\overline{X}=\dfrac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{9}x_i=\dfrac{1}{9}(\sum\limits_{i=1}^{8}x_i+x_9)=\dfrac{1}{9}\times(40+4)=\dfrac{44}{9}$，$S^2=\dfrac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{9}(x_i-\overline{X})^2=\dfrac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{9}(x_i^2-2x_i\overline{X}+\overline{X}^2)=\dfrac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{9}x_i^2-2\overline{X}\times\dfrac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{9}x_i+\dfrac{1}{9}\times9\overline{X}^2=\dfrac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{9}x_i^2-2\overline{X}^2+\overline{X}^2=\dfrac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{9}x_i^2-\overline{X}^2=\dfrac{1}{9}(\sum\limits_{i=1}^{8}x_i^2+x_9^2)-\overline{X}^2=\dfrac{1}{9}\times(216+16)-\dfrac{1\,936}{81}=\dfrac{152}{81}$，所以增加数据后的样本平均数为 $\dfrac{44}{9}$，方差为 $\dfrac{152}{81}$.

11. ACD 【解析】由 $(a_{2\,022}-1)\cdot(a_{2\,023}-1)<0$，得 $a_{2\,022}-1$ 和 $a_{2\,023}-1$ 异号，即 $\begin{cases}a_{2\,022}-1>0,\\a_{2\,023}-1<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_{2\,022}-1<0,\\a_{2\,023}-1>0.\end{cases}$ 又 $a_{2\,022}\cdot a_{2\,023}>1$，所以 $a_1^2q^{4\,043}>1$，由 $a_1>1$，可得 $q>0$，所以数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，则 $a_{2\,022}>1$，$a_{2\,023}<1$，即数列 $\{a_n\}$ 的前 2 022 项都大于 1，从第 2 023 项开始都小于 1. 对于 A，公比 $q=\dfrac{a_{2\,023}}{a_{2\,022}}<1$，则 $0<q<1$. 又 $a_1>1$，所以 $\{a_n\}$ 为递减数列，故 A 正确；对于 B，因为 $a_{2\,023}<1$，所以 $a_{2\,023}=S_{2\,023}-S_{2\,022}<1$，所以 $S_{2\,022}+1>S_{2\,023}$，故 B 错误；对于 C，等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n，且数列 $\{a_n\}$ 的前 2 022 项都大于 1，从第 2 023 项开始都小于 1，所以 $T_{2\,022}$ 是数列 $\{T_n\}$ 中的最大项，故 C 正确；对于 D，$T_{4\,045}=a_1a_2a_3\cdots a_{4\,045}=a_1(a_1q)(a_1q^2)\cdots(a_1q^{4\,044})=a_1^{4\,045}q^{1+2+3+\cdots+4\,044}=a_1^{4\,045}q^{2\,022\times4\,045}=(a_1q^{2\,022})^{4\,045}=a_{2\,023}^{4\,045}$. 因为 $a_{2\,023}<1$，所以 $a_{2\,023}^{4\,045}<1$，即 $T_{4\,045}<1$，故 D 正确.

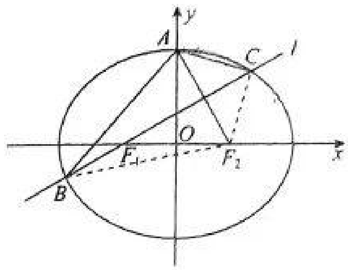
12. AC 【解析】因为 $f(x)=a\sin x-b\cos x\ (ab\neq0)$，所以 $f'(x)=a\cos x+b\sin x$. 将 $f'(x)$ 图象上的所有点向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度可得 $y=a\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+b\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=a\sin x-b\cos x=f(x)$ 的图象，故 A 正确；易知 $f(x)$ 的图象与 $f\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 对称，$f\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=a\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)-b\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=-a\cos x+b\sin$

误；当 $a=b$ 时，$f(x)+f'(x)=2a\sin x$，$f(x)-f'(x)=-2a\cos x$；当 $a+b=0$ 时，$f(x)+f'(x)=2a\cos x$，$f(x)-f'(x)=2a\sin x$；当 $a\neq b$ 或 $a+b\neq 0$ 时，$f(x)+f'(x)=(a+b)\sin x+(a-b)\cos x=\sqrt{(a+b)^2+(a-b)^2}\sin(x+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\frac{a-b}{a+b}$，所以 $f(x)+f'(x)$ 的最大值为 $\sqrt{(a+b)^2+(a-b)^2}=\sqrt{2(a^2+b^2)}$，$f(x)-f'(x)=(a-b)\sin x-(a+b)\cos x=\sqrt{(a-b)^2+(a+b)^2}\sin(x-\theta)$，其中 $\tan\theta=\frac{a+b}{a-b}$，所以 $f(x)-f'(x)$ 的最大值为 $\sqrt{(a-b)^2+(a+b)^2}=\sqrt{2(a^2+b^2)}$．综上，$f(x)+f'(x)$ 与 $f(x)-f'(x)$ 有相同的最大值，故 C 正确；当 $a=b$ 时，$f(x)+f'(x)=2a\sin x$，$f(x)-f'(x)=-2a\cos x$，当 $a>0$ 时，$f(x)+f'(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，$f(x)-f'(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增；当 $a<0$ 时，$f(x)+f'(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，$f(x)-f'(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减．综上，$f(x)+f'(x)$ 与 $f(x)-f'(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调性相同，但可能单调递增也可能单调递减，故 D 错误．

三、填空题

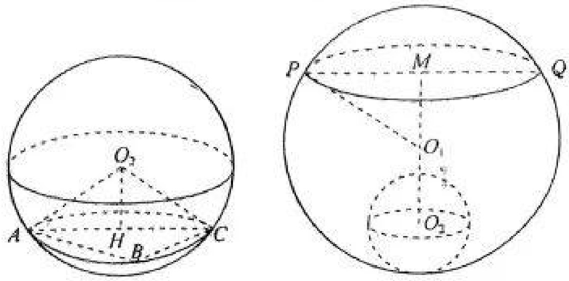
13. $\sqrt{3}$ 或 6 【解析】因为平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的两两夹角相同，所以夹角均为 $\frac{2\pi}{3}$ 或 0．当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的夹角均为 $\frac{2\pi}{3}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{c}^2+4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1+4+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=3$，则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|=\sqrt{3}$；当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的夹角均为 0 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1$，所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2+9\boldsymbol{c}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+12\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}=6$．综上，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|=\sqrt{3}$ 或 6．

14. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 【解析】如图，连接 CF_2，BF_2，因为直线 l 垂直平分线段 AF_2，所以 $|CF_2|=|AC|$，$|BF_2|=|AB|$，所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $|CF_2|+|BF_2|+|BF_1|+|CF_1|=4a$．由题意得 $A(0,1)$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，则 AF_2 的中点为 $\left(\frac{c}{2},\frac{1}{2}\right)$，$k_{AF_2}=\frac{1-0}{0-c}=-\frac{1}{c}$，所以直线 l 的斜率为 c，故直[illegible] $\frac{c}{2}\right)$．因为直线 l 经过点 $F_1(-c,0)$，所以 $-\frac{1}{2}=c\left(-c-\frac{c}{2}\right)$，解得 $c=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故 $\triangle ABC$ 的周长为 $4a=\frac{8\sqrt{3}}{3}$．



15. 27 【解析】根据题意可知抛掷 3 次骰子后恰好回到起点①处需要 8 步或 16 步，所以抛掷 3 次骰子的点数之和为 8 或 16，则抛掷 3 次的点数可以为 1,1,6；1,2,5；1,3,4；2,2,4；2,3,3；4,6,6；5,5,6．当点数为 1,1,6；2,2,4；2,3,3；4,6,6；5,5,6 时，有 $5\times C_3^1=15$ 种走法；当点数为 1,2,5；1,3,4 时，有 $2\times A_3^3=12$ 种走法．综上，不同的走法种数为 $12+15=27$．

16. 15 【解析】如图①，在球 O_2 中，因为球心 O_2 在截面 ABC 上的投影 H 恰为 AC 的中点，所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 $\angle ABC=90^\circ$．又 $O_2H=1$，$O_2A=2$，所以 $AH=\sqrt{3}$，$AC=2\sqrt{3}$．设 $AB=m$，$BC=n$，则 $m^2+n^2=AC^2=12$，而 $12=m^2+n^2\geqslant 2mn$，所以 $mn\leqslant 6$，当且仅当 $m=n=\sqrt{6}$ 时，等号成立，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}mn\leqslant 3$．如图②，因为球 O_1 的半径为 10，$PQ=16$，M 为线段 PQ 的中点，所以 $MO_1=\sqrt{10^2-8^2}=6$，当 M,O_1,O_2 三点共线且为如图②所示的位置时，点 M 到平面 ABC 的距离最大，即此时三棱锥 $M\text{-}ABC$ 的高 h 最大，此时 $h=MO_1+O_1O_2+O_2H=6+8+1=15$，所以此时 $V_{三棱锥M\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times15\leqslant\frac{1}{3}\times3\times15=15$，即三棱锥 $M\text{-}ABC$ 体积的最大值是 15．



① ②

四、解答题

17. 解：(1)由$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{4}+\frac{a_3}{8}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}$ ①，

得当$n\geqslant2$时，$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{4}+\frac{a_3}{8}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=3-\frac{2n+1}{2^{n-1}}$ ②，

①－②，得$\frac{a_n}{2^n}=\frac{2n+1}{2^{n-1}}-\frac{2n+3}{2^n}=\frac{2n-1}{2^n}$，

所以$a_n=2n-1(n\geqslant2)$. （2分）

当$n=1$时，$\frac{a_1}{2}=3-\frac{2\times1+3}{2}$，解得$a_1=1$，也符合上式，

所以$a_n=2n-1$. （4分）

(2)因为$\{a_n\}$是等差数列，所以$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{(2n-1+1)n}{2}=n^2$，

所以$b_1b_2b_3\cdots b_n=n^2$， （6分）

当$n\geqslant2$时，$b_1b_2b_3\cdots b_{n-1}=(n-1)^2$，

所以$b_n=\frac{n^2}{(n-1)^2}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^2(n\geqslant2)$.

当$n=1$时，$b_1=1$，所以$b_n=\begin{cases}1, n=1,\\ \left(\frac{n}{n-1}\right)^2, n\geqslant2,\end{cases}$

所以$\ln b_n=\begin{cases}0, n=1,\\ 2\ln\frac{n}{n-1}, n\geqslant2,\end{cases}$

则当$n=1$时，$T_1=0$； （8分）

当$n\geqslant2$时，$T_n=\ln b_1+\ln b_2+\ln b_3+\cdots+\ln b_n=0+2[\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln n-\ln(n-1)]=2\ln n$.

所以$T_n=2\ln n$. （10分）

解：(1)由已知及正弦定理，得$\frac{a-b}{\sqrt3 a-c}=\frac{c}{a+b}$，整理得$a^2+c^2-b^2=\sqrt3 ac$.

由余弦定理，得$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt3 ac}{2ac}=\frac{\sqrt3}{2}$.

又$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$B=\frac{\pi}{6}$. （4分）

(2)由正弦定理，得$\frac{2}{\sin A}=\frac{b}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{c}{\sin C}$，

所以$b=\frac{1}{\sin A}$，$c=\frac{2\sin C}{\sin A}=\frac{2\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin A}=\frac{\sqrt3\sin A+\cos A}{\sin A}$，

则$b+c=\frac{\sqrt3\sin A+\cos A+1}{\sin A}=\sqrt3+\frac{1+\frac{1}{\cos A}}{\tan A}=\sqrt3+\frac{1+\sqrt{1+\tan^2A}}{\tan A}=\sqrt3+\frac{1}{\tan A}+\sqrt{\frac{1}{\tan^2A}+1}$.

（8分）

在锐角三角形ABC中，$B=\frac{\pi}{6}$，则$A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$C=\pi-\frac{\pi}{6}-A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，解得$A\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$，

故$\tan A\in(\sqrt3,+\infty)$，$\frac{1}{\tan A}\in\left(0,\frac{\sqrt3}{3}\right)$， （10分）

则$\sqrt{\frac{1}{\tan^2A}+1}\in\left(1,\frac{2\sqrt3}{3}\right)$，

故$b+c\in(1+\sqrt3,2\sqrt3)$，$a+b+c\in(3+\sqrt3,2+2\sqrt3)$，

所以$\triangle ABC$的周长的取值范围是$(3+\sqrt3,2+2\sqrt3)$.

（12分）

19. (1)证明：如图，在平面PAD内过点A作$AH\perp PD$，垂足为H.

因为平面$PAD\perp$平面PCD，平面$PAD\cap$平面$PCD=PD$，

所以$AH\perp$平面PCD. （2分）

又$CD\subset$平面PCD，所以$AH\perp CD$.

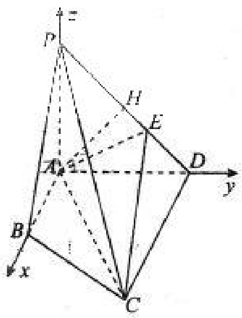
因为$PA\perp$平面$ABCD$，$CD\subset$平面$ABCD$，

所以$PA\perp CD$. （3分）

又$AH\cap PA=A$，AH，$PA\subset$平面PAD，

所以$CD\perp$平面PAD.

因为$AB/\!/CD$，所以$AB\perp$平面PAD. （4分）



(2)解：由(1)可知$AB\perp$平面PAD，而$AD\subset$平面PAD，

所以$AB\perp AD$，所以AB，AD，AP两两垂直. （5分）

以A为坐标原点，AB，AD，AP所在直线分别为x，y，z轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

因为$PA=AB=AD=\frac{1}{2}CD=1$，$\overrightarrow{PE}=2\overrightarrow{ED}$，

所以$A(0,0,0)$，$C(2,1,0)$，$D(0,1,0)$，$E\left(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$，

（6分）

所以$\overrightarrow{AC}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{AE}=\left(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$，

$\overrightarrow{DE}=\left(0,-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

设平面 AEC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_1+y_1=0,\\ \dfrac{2}{3}y_1+\dfrac{1}{3}z_1=0.\end{cases}$

令 $x_1=1$,得 $y_1=-2$,$z_1=4$,所以平面 AEC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,-2,4)$. (8 分)

设平面 DEC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_2=0,\\ -\dfrac{1}{3}y_2+\dfrac{1}{3}z_2=0.\end{cases}$

令 $y_2=1$,得 $x_2=0$,$z_2=1$,所以平面 DEC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$. (10 分)

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1\times0+(-2)\times1+4\times1}{\sqrt{21}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{42}}{21}$,

由图可知所求二面角的平面角为钝角,

故二面角 $A\text{-}EC\text{-}D$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{42}}{21}$. (12 分)

20. 解:(1)零假设为 H_0:球队胜利与球员甲参赛无关.

因为 $\chi^2=\dfrac{50\times(3\times11-7\times29)^2}{32\times18\times10\times40}\approx6.272>5.024=x_{0.025}$,

所以依据小概率值 $\alpha=0.025$ 的独立性检验,我们推断 H_0 不成立,即认为球队胜利与球员甲参赛有关,此推断犯错误的概率不大于 0.025. (2 分)

(2)(i)设 A_1 表示"球员甲出任边锋",A_2 表示"球员甲出任中锋",A_3 表示"球员甲出任前腰",A_4 表示"球员甲出任后卫",B 表示"球队输掉某场比赛",

则 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)+P(A_4)P(B|A_4)=0.2\times0.4+0.4\times0.3+0.3\times0.4+0.1\times0.2=0.34$. (7 分)

(ii)因为 $P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}{P(B)}=\dfrac{0.2\times0.4}{0.34}=\dfrac{4}{17}$,

$P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}{P(B)}=\dfrac{0.4\times0.3}{0.34}=\dfrac{6}{17}$,

$P(A_3|B)=\dfrac{P(A_3B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_3)\cdot P(B|A_3)}{P(B)}=\dfrac{0.3\times0.4}{0.34}=\dfrac{6}{17}$,

$P(A_4|B)=\dfrac{P(A_4B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_4)\cdot P(B|A_4)}{P(B)}=\dfrac{0.1\times0.2}{0.34}=\dfrac{1}{17}$, (11 分)

所以 $P(A_1|B):P(A_2|B):P(A_3|B):P(A_4|B)=4:6:6:1$,

所以应该多让球员甲担当后卫,来扩大赢球场次. (12 分)

21. 解:(1)因为当 l 过 C 的焦点且垂直于 x 轴时,$|AB|=4$,

所以点 $\left(\dfrac{p}{2},2\right)$ 在 C 上,则 $2^2=2p\times\dfrac{p}{2}$,解得 $p=2$. (2 分)

所以 C 的方程为 $y^2=4x$,准线方程为 $x=-1$. (3 分)

(2)先证明抛物线 C 在其上一点 $Q(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $2x-y_0y+2x_0=0$.

证明如下:由点 $Q(x_0,y_0)$ 在抛物线 C 上,得 $y_0^2=4x_0$,

联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\ 2x-y_0y+2x_0=0,\end{cases}$ 得 $y^2-2y_0y+y_0^2=0$,

则 $\Delta=4y_0^2-4y_0^2=0$,所以 C 在其上一点 $Q(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $2x-y_0y+2x_0=0$. (5 分)

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$P(x_3,y_3)$,

则直线 PA 的方程为 $2x-y_1y+2x_1=0$,直线 PB 的方程为 $2x-y_2y+2x_2=0$.

因为点 P 在直线 PA,PB 上,

所以 $\begin{cases}2x_3-y_1y_3+2x_1=0,\\ 2x_3-y_2y_3+2x_2=0,\end{cases}$

所以直线 AB 的方程为 $2x-y_3y+2x_3=0$. (7 分)

联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\ 2x-y_3y+2x_3=0,\end{cases}$ 得 $y^2-2y_3y+4x_3=0$,

则 $\Delta=4y_3^2-16x_3>0$,即 $y_3^2-4x_3>0$,

所以 $y_1+y_2=2y_3$,$y_1y_2=4x_3$,

$|AB|=\sqrt{1+\left(\dfrac{y_3}{2}\right)^2}\cdot|y_1-y_2|=\dfrac{\sqrt{y_3^2+4}}{2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{(y_3^2+4)(y_3^2-4x_3)}$.

又点 P 到直线 AB 的距离为 $d=\dfrac{|4x_3-y_3^2|}{\sqrt{y_3^2+4}}$,

所以 $S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\sqrt{(y_3^2+4)(y_3^2-4x_3)}\cdot\dfrac{|4x_3-y_3^2|}{\sqrt{y_3^2+4}}=\dfrac{1}{2}(y_3^2-4x_3)^{\frac{3}{2}}$. (10 分)

又 $y_3^2-4x_3=-x_3^2-2x_3-4x_3=-(x_3+3)^2+9$,其中 $-2\leqslant x_3<0$,

当 $x_3=-2$ 时,$y_3^2-4x_3$ 取得最大值 8,

所以 $S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}(y_3^2-4x_3)^{\frac{3}{2}}\leqslant\dfrac{1}{2}\times8^{\frac{3}{2}}=8\sqrt{2}$.

故 $\triangle PAB$ 面积的最大值为 $8\sqrt{2}$. (12 分)

22. (1)解:因为 $f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-ax$,$a\in\mathbf{R}$,

所以 $f'(x)=e^x-x-a$.

令 $g(x)=e^x-x-a$,则 $g'(x)=e^x-1$.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)_{min}=g(0)=1-a$.　(1分)

当 $a\leqslant1$ 时，$g(x)_{min}=1-a\geqslant0$，$f(x)$ 在 R 上单调递增，无极值点；　(2分)

令 $t(x)=e^x-2x$，则 $t'(x)=e^x-2$.

当 $x\in(-\infty,\ln 2)$ 时，$t'(x)<0$，$t(x)$ 单调递减；当 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 时，$t'(x)>0$，$t(x)$ 单调递增.

所以 $t(x)\geqslant t(\ln 2)=2-2\ln 2=2(1-\ln 2)>0$.

即 $e^x-2x>0$.　(3分)

当 $a>1$ 时，$g(x)_{min}=1-a<0$.

又 $g(-a)=e^{-a}>0$，$g(a)=e^a-2a>0$，

由函数零点存在定理知 $\exists m\in(-a,0)$，$n\in(0,a)$，使得 $g(m)=g(n)=0$.

当 $x\in(-\infty,m)$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$；当 $x\in(m,n)$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$；当 $x\in(n,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $x=m$ 处取得极大值，$x=n$ 处取得极小值.

综上，当 $a\leqslant1$ 时，$f(x)$ 的极值点个数为 0；当 $a>1$ 时，$f(x)$ 的极值点个数为 2.　(5分)

(2)证明：令 $F(x)=f(x)+f(-x)-2$，则 $F(x)=e^x+e^{-x}-x^2-2$，

所以 $F'(x)=e^x-e^{-x}-2x$，$F(-x)=F(x)$，

所以 $F(x)$ 为偶函数.

令 $h(x)=e^x-e^{-x}-2x$，则 $h'(x)=e^x+e^{-x}-2$.

当 $x\geqslant0$ 时，$h'(x)\geqslant2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

所以 $F'(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则 $F'(x)\geqslant F'(0)=0$.

所以 $F(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则 $F(x)\geqslant F(0)=0$.

又 $F(x)$ 为偶函数，所以 $F(x)\geqslant0$ 恒成立.　(8分)

不妨设 $x_2>0$，要证 $x_1+x_2<0$，即证 $x_1<-x_2$.

由(1)知当 $a\leqslant1$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递增，则需证 $f(x_1)<f(-x_2)$.

因为 $f(x_1)+f(x_2)=2$，所以 $f(x_1)=2-f(x_2)$，

只需证 $2-f(x_2)<f(-x_2)$，

即证 $f(x_2)+f(-x_2)>2$.

由 $F(x)=f(x)+f(-x)-2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒大于零，且 $x_2>0$，得 $F(x_2)=f(x_2)+f(-x_2)-2>0$，

故 $f(x_2)+f(-x_2)>2$ 成立，

从而 $x_1+x_2<0$ 得证.