高三数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 i 为虚数单位，复数 z 在复平面内对应的点为 $(-1,2)$，则 $|3+\mathrm{i}z|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

2. 已知 $A=\{y\in\mathbf{N}\mid y=-x^2+4x,x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid\ln x>1\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{1,2,3,4\}$　　D. $\{0\}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sin\alpha+\cos\alpha,-1)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\alpha,1)$，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\tan\alpha=$

A. $\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. -2　　D. 2

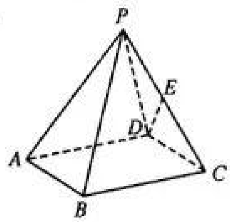
4. 已知 $\sin\alpha+2\cos\alpha=1$，α 为第四象限角，则 $\sin2\alpha$ 的值为

A. $-\frac{24}{25}$　　B. $\frac{24}{25}$　　C. $-\frac{4}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

5. 已知 $f(x)$ 是偶函数，当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=x^2-2x$，若 $f(a)=3$，则 $a=$

A. ±1　　B. ±3　　C. -1 或 3　　D. ±1 或 ±3

6. 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB=PA=2$，E 为 PC 的中点，则异面直线 AP 与 DE 所成角的余弦值为



A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

7. 若正数 x,y,z 满足 $5^x=6^y=\log_7 z$，则

A. $z>y>x$　　B. $x>z>y$　　C. $y>z>x$　　D. $z>x>y$

8. 已知圆 $C_1:x^2+y^2=9$ 和圆 $C_2:x^2+y^2=1$，点 P 为 C_1 上任意一点，过 P 作 C_2 的两条切线，连接两个切点的线段称为圆 C_2 的切点弦，则在圆 C_2 内不与切点弦相交的区域的面积为

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{9}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 m,n 是空间中两条不同的直线，α,β 是两个不同的平面，Q 是空间中的一个点，下列命题正确的是

A. 若 $Q\in\alpha,Q\in m$，则 $m\subset\alpha$

B. 若 $m\cap n=Q,m\subset\beta$，则 $n\subset\beta$

C. 若 $m/\!/n,m\subset\alpha,Q\in n,Q\in\alpha$，则 $n\subset\alpha$

D. 若 $\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=n,Q\in\beta,Q\in m,m\perp\alpha$，则 $m\subset\beta$

10. 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{4}-y^2=\lambda(\lambda\neq0)$，则

A. $\forall\lambda\neq0$，E 的渐近线方程为 $x\pm2y=0$

B. $\forall\lambda\neq0$，E 的离心率为$\frac{\sqrt5}{2}$

C. $\exists\lambda\neq0$，E 的离心率为$\sqrt5$

D. $\forall\lambda\neq0$，E 的虚轴长为 $2\sqrt\lambda$

11. 下列说法正确的是

A. 若 $x<\frac12$，则函数 $y=2x+\frac{1}{2x-1}$的最小值为-1

B. 若实数 a,b 满足 $a>0,b>0,c>0$，且 $a+b+c=2$，则$\frac{4}{a+1}+\frac{1}{b+c}$的最小值是 3

C. 若实数 a,b 满足 $a>0,b>0$，且 $2a+b+ab=6$，则 $2a+b$ 的最大值是 4

D. 若实数 a,b 满足 $a>0,b>0$，且 $a+b=2$，则$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}$的最小值是 1

12. 某计算机程序每运行一次都随机出现一个 n 位二进制数 $A=a_1a_2a_3a_4\cdots a_n$，其中 a_i $(i=1,2,3,\cdots,n)\in\{0,1\}$，若在 A 的各数位上出现 0 和 1 的概率均为$\frac12$，记 $X=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，则当程序运行一次时

A. $P(X=0)=\frac{1}{2^n}$

B. $P(X=k)=P(X=n-k)(0\leqslant k\leqslant n,k\in\mathbf{N}^*)$

C. X 的数学期望 $E(X)=\frac n2$

D. X 的方差 $D(X)=\frac{n^2}{4}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 某校机器人兴趣小组有男生 3 名，女生 2 名，现从中随机选出 3 名参加一个机器人大赛，则选出的 3 名学生中既有男生又有女生的选法有________种.

14. 已知 F_1,F_2 为椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 的左、右焦点，点 P 为 C 上一点，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的最小值为________，$\frac{1}{|PF_1|}+\frac{1}{|PF_2|}$的最小值为________.

15. 湖北省中药材研发中心整合省农业科技创新中心、省创新联盟相关资源和力量，为全省中药材产业链延链、补链、强链提供科技支撑. 某科研机构研究发现，某品种中医药的药物成分甲的含量 x(单位:g)与药物功效 y(单位:药物单位)之间满足 $y=15x-2x^2$. 检测这种药品一个批次的 6 个样本，得到成分甲的含量 x 的平均值为 5 g，标准差为$\sqrt5$ g，则估计这批中医药的药物功效 y 的平均值为________药物单位.

16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp BC$，$BC=2PA=2AB=4$，$PC=2\sqrt6$，点 M,N 分别是 PB,BC 的中点，且 $AM\perp PC$，则平面 AMN 截三棱锥 $P-ABC$ 的外接球所得截面的面积是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知△ABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a，b，c，且 $a=4\sqrt{3}$，$4\sin B=b(1-\cos A)$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $\sin C=2\sin B$，求△ABC 的面积.

18.（本小题满分 12 分）

在数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$中，$a_1=b_1=1$，$\{b_n\}$为各项均为正数的等比数列，且其前三项和为$\frac{7}{4}$；$\{a_nb_n\}$为等差数列，且其前三项和为 9.

(1)求$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2)求$\{a_n\}$的前 n 项和 T_n.

19.（本小题满分 12 分）

北方某市组织中学生开展冰雪运动的培训活动，并在培训结束后对学生进行了考核，记考核成绩不小于 80 分的为优秀. 为了了解本次培训活动的效果，在参加培训的学生中随机抽取了 60 名学生的考核成绩，如下表.

成绩	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
人数	5	5	15	25	10

(1)从参加培训的学生中随机选取 1 人，请根据表中数据，估计这名学生考核优秀的概率；

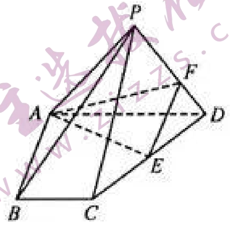
(2)用分层抽样的方法，在考核成绩为[70,90)的学生中任取 8 人，再从这 8 人中随机选取4 人，记取到考核成绩在[80,90)的学生为 X，求 X 的分布列和数学期望.

20.(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为直角梯形,$AB\perp BC$,$AB\perp AD$,$\triangle PAD$ 为等腰直角三角形,$AP\perp PD$,$AD=6$,$BC=2$,$AB=4$,平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$,E 为 CD 的中点,$PF=2DF$.

(1)证明:EF∥平面 PAB;

(2)求平面 AEF 与平面 PCD 夹角的余弦值.

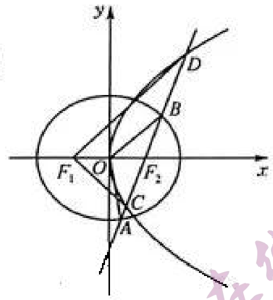


21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别是 F_1,F_2,抛物线 $C_2:y^2=4x$ 的准线过点 F_1,且 C_2 的准线与 C_1 交于 M,N,$|MN|=3$.

(1)求 C_1 的方程;

(2)如图,过 F_2 作直线 l 交 C_1 于 A,B,交 C_2 于 C,D,O 为坐标原点,记 $\triangle OAB$,$\triangle F_1CD$ 的面积分别是 S_1,S_2,且 $S_2=4S_1$,求直线 l 的方程.



22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\tan x-\frac{1}{3}x^3+ax(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=\frac{\pi^2}{16}-2$,求 $f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$上的极值;

(2)若 $f(x)\geqslant 0$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$上恒成立,求实数 a 的取值范围;

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. A　由复数的几何意义得 $z=-1+2\mathrm{i}$，所以 $|3+\mathrm{i}z|=|3+\mathrm{i}(-1+2\mathrm{i})|=|1-\mathrm{i}|=\sqrt{2}$. 故选 A.

2. D　$A=\{0,3,4\}$，$B=\{x|x>\mathrm{e}\}$，$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x\leqslant \mathrm{e}\}$，所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{0\}$. 故选 D.

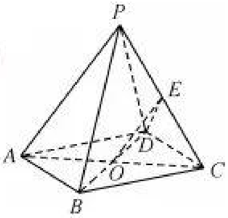
3. C　因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\cos\alpha$，即 $\sin\alpha=-2\cos\alpha$，所以 $\tan\alpha=-2$. 故选 C.

4. A　因为 $\sin\alpha+2\cos\alpha=1$，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\begin{cases}\sin\alpha=1,\\ \cos\alpha=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin\alpha=-\dfrac{3}{5},\\ \cos\alpha=\dfrac{4}{5}.\end{cases}$ 又 α 为第四象限角，所以 $\begin{cases}\sin\alpha=-\dfrac{3}{5},\\ \cos\alpha=\dfrac{4}{5},\end{cases}$ 所以

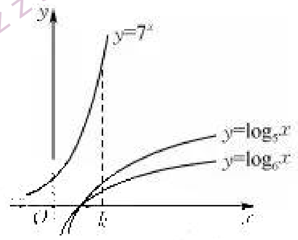
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{24}{25}$. 故选 A

5. B　当 $a\geqslant 0$ 时，由 $f(a)=3$，得 $a^2-2a=3$，解得 $a=-1$（舍去）或 $a=3$；根据偶函数的图象关于 y 轴对称，可知当 $a<0$ 时，由 $f(a)=3$，得 $a=1$（舍去）或 $a=-3$. 综上，$a=\pm 3$. 故选 B.

6. C　如图，连接 AC，BD 相交于 O，连 OE，则 O 为 AC 的中点，又 E 为 PC 的中点，所以 $OE/\!/AP$，所以 $\angle DEO$ 为 AP 与 DE 所成的角. 又 $DE=\sqrt{3}$，$OE=1$，$OD=\sqrt{2}$，所以 $DE^2=OE^2+OD^2$，所以 $\angle EOD=90°$，所以 $\cos\angle DEO=\dfrac{OE}{DE}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 C.

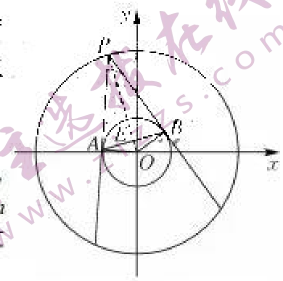


7. D　设 $5^x=6^y=\log_7 z=k>1$，则 $x=\log_5 k$，$y=\log_6 k$，$z=7^k$，在同一坐标系中作出 $y=\log_5 x$，$y=\log_6 x$，$y=7^x$ 的图象，如图所示，



易得 $7^k>\log_5 k>\log_6 k$，即 $z>x>y$. 故选 D.

8. B　如图，切点为 A，B，连接 OA，OB，OP，OP 与 AB 的交点为 E，由 $|PA|=|PB|$，$|OA|=|OB|$ 知 $AB\perp OP$，又 $|OA|=1$，$|OP|=3$，$OA\perp PA$，$\cos\angle POA=\dfrac{|OA|}{|OP|}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{|OE|}{|OA|}$，所以 $|OE|=\dfrac{1}{3}$，故切点弦始终与圆 $x^2+y^2=\dfrac{1}{9}$ 相切，故所求面积为 $\dfrac{\pi}{9}$. 故选 B.



9. CD　对于 A，若 $Q\in\alpha$，$Q\in m$，直线 m 与平面 α 可能相交，故 A 错误；对于 B，若 $m\cap n=Q$，$m\subset\beta$，可知 n 上有一点在 β 内，根据两点确定一条直线可知，n 不一定在 β 内，故 B 错误；对于 C，$\because m/\!/n$，$m\subset\alpha$，$Q\in n$，$Q\in\alpha$，$\therefore n\subset\alpha$，故 C 正确；对于 D，$\because \alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=n$，$Q\in\beta$，$Q\in m$，$m\perp\alpha$，$\therefore m\subset\beta$，故 D 正确. 故选 CD.

10. AC　当 $\lambda>0$ 时，E 的方程可化为 $\dfrac{x^2}{4\lambda}-\dfrac{y^2}{\lambda}=1$，此时其渐近线方程为 $x\pm 2y=0$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，虚轴长为 $2\sqrt{\lambda}$；当 $\lambda<0$ 时，E 的方程可化为 $\dfrac{y^2}{-\lambda}-\dfrac{x^2}{-4\lambda}=1$，此时其渐近线方程为 $x\pm 2y=0$，离心率为 $\sqrt{5}$，虚轴长为 $4\sqrt{-\lambda}$，故 AC 正确，BD 错误. 故选 AC.

11. BD　函数 $y=2x+\dfrac{1}{2x-1}=2x-1+\dfrac{1}{2x-1}+1$，又 $x<\dfrac{1}{2}$，所以 $1-2x>0$，所以 $1-2x+\dfrac{1}{1-2x}\geqslant 2\sqrt{(1-2x)\cdot\dfrac{1}{1-2x}}=2$，当且仅当 $1-2x=\dfrac{1}{1-2x}$，即 $x=0$ 时取等号，所以 $y=2x-1+\dfrac{1}{2x-1}+1\leqslant -2+1=-1$，即函数 $y=2x+\dfrac{1}{2x-1}$ 的最大值为 -1，故 A 错误；由 $a+b+c=2$，可得 $a+1+b+c=3$，则 $\dfrac{4}{a+1}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{a+1}+\dfrac{1}{b+c}\right)(a+1+b+c)=\dfrac{1}{3}\left[5+\dfrac{4(b+c)}{a+1}+\dfrac{a+1}{b+c}\right]$. 又 $a>0$，$b>0$，$c>0$，所以 $\dfrac{4(b+c)}{a+1}+\dfrac{a+1}{b+c}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{4(b+c)}{a+1}\cdot\dfrac{a+1}{b+c}}=4$，当且仅当 $\dfrac{4(b+c)}{a+1}=\dfrac{a+1}{b+c}$，即 $a=1$，$b+c=1$ 时取等号. 所以 $\dfrac{4}{a+1}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{1}{3}\left[5+\dfrac{4(b+c)}{a+1}+\dfrac{a+1}{b+c}\right]\geqslant\dfrac{1}{3}\times(5+4)=3$，则 $\dfrac{4}{a+1}+\dfrac{1}{b+c}$ 的最小值是 3，故 B 正确；由 $2a+b+ab=6$，可得 $ab=6-(2a+b)\leqslant\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2a+b}{2}\right)^2$，又 $a>0$，$b>0$，所以 $2a+b\geqslant 4$，当且仅当 $2a=b=2$ 时取等号，故 C 错误；令 $a+1=m>1$，$b+1=n>1$，则 $m+n=4$，所以 $\dfrac{a^2}{a+1}+\dfrac{b^2}{b+1}=\dfrac{(m-1)^2}{m}+\dfrac{(n-1)^2}{n}=m+n+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}-4=\dfrac{m+n}{mn}$

$=\frac{4}{mn}\geqslant\frac{4}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2}=1$，当且仅当 $m=n=2$，即 $a=b=1$ 时取等号，故 D 正确．故选 BD．

12．ABC　由二进制数 A 的特点知每一个数位上的数字只能填 0，1，每位数出现 0，1 是独立的，所以 $X\sim B\left(n,\frac{1}{2}\right)$，所以 $P(X=0)=C_n^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}$，故 A 正确；$P(X=k)=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}=C_n^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\left(1-\frac{1}{2}\right)^k=P(X=n-k)$，故 B 正确；因为 $X\sim B\left(n,\frac{1}{2}\right)$，所以 $E(X)=n\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$，$D(X)=n\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{n}{4}$，故 C 正确，D 错误．故选 ABC．

13．9　选出的人员中恰好有一名女生的选法有 $C_3^2C_2^1=6$ 种，选出的人员中恰好有两名女生的选法有 $C_3^1C_2^2=3$ 种，所以选出的 3 名学生中既有男生又有女生的选法有 $6+3=9$ 种．

14．12（3 分）　$\frac{1}{2}$（2 分）　因为 $|PF_1|+|PF_2|=8$，所以 $|PF_1|=8-|PF_2|$，所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=8|PF_2|-|PF_2|^2=16-(|PF_2|-4)^2$，又 $2\leqslant|PF_2|\leqslant6$，所以 $12\leqslant|PF_1|\cdot|PF_2|\leqslant16$，所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的最小值为 12．又 $\frac{1}{|PF_1|}+\frac{1}{|PF_2|}=\frac{|PF_1|+|PF_2|}{|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{8}{|PF_1|\cdot|PF_2|}$，所以 $\frac{1}{|PF_1|}+\frac{1}{|PF_2|}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$．

15．15　设 6 个样本中药物成分甲的含量分别为 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6，因为成分甲的含量的平均值为 5 g，所以 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=30$，标准差为 $\sqrt{5}$ g，所以 $\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i-5)^2=5$，可得 $\sum_{i=1}^{6}x_i^2=180$．又由 $y=15x-2x^2$，所以 $\sum_{i=1}^{6}y_i=15\sum_{i=1}^{6}x_i-2\sum_{i=1}^{6}x_i^2=90$，所以这批中医药的药物功效的平均值为 $\frac{1}{6}\times\sum_{i=1}^{6}y_i=15$．

16．$\frac{14\pi}{3}$　因为 $PA=AB$，M 是 PB 的中点，所以 $AM\perp PB$，又 $AM\perp PC$，$PB\cap PC=P$，$PB,PC\subset$ 平面 PBC，所以 $AM\perp$ 平面 PBC，又 $BC\subset$ 平面 PBC，所以 $AM\perp BC$．又 $PA\perp BC$，$PA\cap AM=A$，$PA,AM\subset$ 平面 PAB，所以 $BC\perp$ 平面 PAB．又 $PB,AB\subset$ 平面 PAB，所以 $BC\perp AB$，$BC\perp PB$．在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$BC=4$，$BC\perp AB$，所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2\sqrt{5}$．在 $\triangle PAC$ 中，$AC=2\sqrt{5}$，$PA=2$，$PC=2\sqrt{6}$，所以 $AC^2+PA^2=PC^2$，所以 $AC\perp PA$．取 PC 的中点 O，又 $BC\perp PB$，$AC\perp PA$，所以 $OA=OB=OC=OP$，即点 O 是三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的球心．设 O 到平面 AMN 的距离为 h，平面 AMN 截球 O 所得的截面圆的半径为 r，因为 MN 是 $\triangle PBC$ 的中位线，所以 O 到平面 AMN 的距离等于 B 到平面 AMN 的距离，故 $V_{O\text{-}AMN}=V_{B\text{-}AMN}=V_{N\text{-}AMB}$，即 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{6}\times h=\frac{1}{3}\times2\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$，得 $h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $r^2=R^2-h^2=\frac{14}{3}$，所以截面圆的面积为 $S=\pi r^2=\frac{14}{3}\pi$．

17．解：(1) 根据题意 $4\sin B=b(1-\cos A)$，得 $\frac{4\sin B}{b}=1-\cos A$．……………… 1 分

由正弦定理可得 $\frac{4\sin A}{a}+\cos A=1$，即 $\frac{4\sin A}{4\sqrt{3}}+\cos A=1$，……………… 3 分

得 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=\sqrt{3}$，$2\left(\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)=\sqrt{3}$，$\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，……………… 4 分

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$，所以 $A+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$．……………… 5 分

(2) 由 $\sin C=2\sin B$，得 $c=2b$，又 $A=\frac{\pi}{3}$，$a=4\sqrt{3}$，

由余弦定理可得：$a^2=b^2+c^2-bc=b^2+4b^2-2b^2=3b^2=48$，……………… 7 分

解得 $b=4$，$c=8$，……………… 8 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=8\sqrt{3}$．……………… 10 分

18．解：(1) 设 $\{b_n\}$ 的公比为 q，

因为 $b_1=1$，$b_1+b_2+b_3=1+q+q^2=\frac{7}{4}$，所以 $q=\frac{1}{2}$ 或 $q=-\frac{3}{2}$，……………… 1 分

因 $\{b_n\}$ 各项为正，故 $q=\frac{1}{2}$，所以 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$．……………… 2 分

因为 $a_1=b_1=1$，所以 $a_1b_1=1$．……………… 3 分

因为 $\{a_nb_n\}$ 为等差数列且其前三项和为 9，即 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=3a_2b_2=9$，

所以 $a_2b_2=3$，所以 $\{a_nb_n\}$ 公差为 $a_2b_2-a_1b_1=2$，……………… 4 分

所以 $a_nb_n=1+2(n-1)=2n-1$．……………… 5 分

又 $a_nb_n=2n-1$，所以 $a_n=\frac{2n-1}{b_n}=(2n-1)\cdot2^{n-1}$．……………… 6 分

(2) $T_n=1\times2^0+3\times2^1+5\times2^2+\cdots+(2n-1)\times2^{n-1}$，①………………

$2T_n=1\times2^1+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2n-1)\times2^n$, ② ………………………………………… 8 分

①－②得

$-T_n=1+2(2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})-(2n-1)\times2^n$ ………………………………………… 9 分

$=1+2\times\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\times2^n$ ………………………………………… 10 分

$=2^{n+1}-(2n-1)\times2^n-3=(3-2n)\times2^n-3$, ………………………………………… 11 分

所以 $T_n=(2n-3)\cdot2^n+3$. ………………………………………… 12 分

19. 解:(1)设该名学生考核成绩优秀为事件 A,由已知 50 名同学的成绩中,优秀的有 35 名同学,

所以 $P(A)=\frac{35}{60}=\frac{7}{12}$,

所以可估计这名学生考核优秀的概率为$\frac{7}{12}$. ………………………………………… 3 分

(2)由已知,用分层抽样方法,在考核成绩为[70,90)的学生中任取 8 人,

则考核成绩在[70,80)的学生应抽取 3 人,考核成绩在[80,90)的学生应抽取 5 人, ……………… 5 分

由题意可得 X 的所有可能取值为 1,2,3,4, ………………………………………… 6 分

所以 $P(X=1)=\frac{C_3^3C_5^1}{C_8^4}=\frac{5}{70}$,$P(X=2)=\frac{C_3^2C_5^2}{C_8^4}=\frac{30}{70}$,

$P(X=3)=\frac{C_3^1C_5^3}{C_8^4}=\frac{30}{70}$,$P(X=4)=\frac{C_5^4}{C_8^4}=\frac{5}{70}$,

所以随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{5}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{5}{70}$

………………………………………… 10 分

所以 $E(X)=1\times\frac{5}{70}+2\times\frac{30}{70}+3\times\frac{30}{70}+4\times\frac{5}{70}=\frac{5}{2}$.

即所求数学期望为$\frac{5}{2}$. ………………………………………… 12 分

20. (1)证明:取 AB 的中点 N,连接 NE,过 F 作 $MF\parallel AD$ 且与 AP 交于点 M,连接 MN.

∵E 为 CD 的中点,N 为 AB 的中点,$BC=2$,$AD=6$,

∴$NE=\frac{1}{2}(BC+AD)=\frac{1}{2}\times(2+6)=4$,$NE\parallel AD$. ………………………………………… 2 分

∵$MF\parallel AD$,$PF=2FD$,$AD=6$,

∴$MF=\frac{2}{3}AD=\frac{2}{3}\times6=4$,

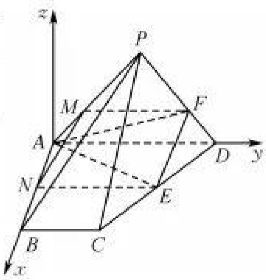
∴$NE\parallel MF$,$NE=MF=4$,

∴四边形 $MNEF$ 为平行四边形,

∴$MN\parallel EF$. ………………………………………… 4 分

∵$MN\subset$平面 PAB,$EF\not\subset$平面 PAB,

∴$EF\parallel$平面 PAB. ………………………………………… 5 分



(2)解:由 $AB\perp BC$,$AB\perp AD$,$\triangle PAD$ 为等腰直角三角形,$AP\perp PD$,$AD=6$,$BC=2$,$AB=4$,平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,以 A 为坐标原点,建立如图所示空间直角坐标系,则

$A(0,0,0)$,$C(4,2,0)$,$D(0,6,0)$,$P(0,3,3)$,$E(2,4,0)$,$F(0,5,1)$. ……………………… 6 分

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,由$\overrightarrow{DC}=(4,-4,0)$,$\overrightarrow{DP}=(0,-3,3)$,

有$\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{m}=4x-4y=0,\\ \overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{m}=-3y+3z=0,\end{cases}$ 取 $x=1$,得 $y=1$,$z=1$,所以平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$; ………………………………………… 8 分

设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$,由$\overrightarrow{AE}=(2,4,0)$,$\overrightarrow{AF}=(0,5,1)$,

有$\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=2a+4b=0,\\ \overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{m}=5b+c=0,\end{cases}$ 取 $b=-1$,得 $a=2$,$c=5$,所以平面 AEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-1,5)$.

………………………………………… 10 分

所以 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2-1+5=6$,$|\boldsymbol{m}|=\sqrt{3}$,$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{30}$,所以平面 AEF 与平面 PCD 夹角的余弦值为$\frac{6}{\ }-\frac{\sqrt{10}}{\ }$

………………………………………… 分

21. 解：(1)由题意知抛物线 $C_2: y^2=4x$ 的准线方程是 $x=-1$，所以 $F_1(-1,0)$，……………… 1分

所以 $\begin{cases}\dfrac{(-1)^2}{a^2}+\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{b^2}=1,\\ a^2-b^2=1,\end{cases}$ ……………… 3分

解得 $a=2, b=\sqrt{3}$，所以 C_1 的方程是 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………… 4分

(2)因为 O 为 F_1, F_2 的中点，所以 O 到直线 l 的距离为 F_1 到 l 距离的一半，又 $S_2=4S_1$，所以 $|CD|=2|AB|$.
……………… 6分

当直线 l 的斜率不存在时，易得 $|AB|=3$，$|CD|=4$，不符合题意；……………… 7分

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

联立方程组 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ 3x^2+4y^2=12\end{cases}$ 可得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$. ……………… 8分

由两点间距离公式可得，$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$，

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4-\dfrac{4k^2}{3+4k^2}$. ……………… 9分

联立方程组 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ y^2=4x,\end{cases}$ 可得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，

则 $x_3+x_4=2+\dfrac{4}{k^2}$，$x_3x_4=1$，

所以 $|CD|=x_3+x_4+2=4+\dfrac{4}{k^2}$，……………… 10分

因为 $\dfrac{|CD|}{|AB|}=\dfrac{1+\frac{1}{k^2}}{1-\frac{k^2}{3+4k^2}}=2$，解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，……………… 11分

所以直线 l 的方程是 $\sqrt{6}x-2y-\sqrt{6}=0$ 或 $\sqrt{6}x+2y-\sqrt{6}=0$. ……………… 12分

22. 解：(1)若 $a=\dfrac{\pi^2}{16}-2$，$f(x)=\tan x-\dfrac{1}{3}x^3+\left(\dfrac{\pi^2}{16}-2\right)x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-x^2+\dfrac{\pi^2}{16}-2$，令 $g(x)=f'(x)$，$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，则 $g'(x)=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}-2x=\dfrac{2(\sin x-x\cos^3 x)}{\cos^3 x}$，令 $M(x)=\sin x-x\cos^3 x$，$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，

则 $M'(x)=\cos x-\cos^3 x+3x\cos^2 x\sin x=\cos x\sin^2 x+3x\cos^2 x\sin x\geqslant 0$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上恒成立，所以 $M(x)<M(0)=0$，所以 $g'(x)<0$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上恒成立，即 $g(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减，所以 $f'(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减，…… 3分

又 $f'\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 上单调递减. ……………… 4分

又 $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{1}{3}\times\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)^3+\left(\dfrac{\pi^2}{16}-2\right)\times\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{2}-1-\dfrac{\pi^3}{96}$，所以 $f(x)$ 的极大值是 $\dfrac{\pi}{2}-1-\dfrac{\pi^3}{96}$.
……………… 5分

(2)由(1)可知函数 $y=\dfrac{1}{\cos^2 x}-x^2$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减，即 $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-x^2+a$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减，
……………… 6分

易知 $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-x^2+a$ 为偶函数，

所以 $f'(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，又 $f'(0)=1+a$. ……………… 7分

当 $1+a\geqslant 0$，即 $a\geqslant -1$ 时，$f'(x)\geqslant f'(0)\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $f(x)\geqslant f(0)=0$，符合题意；
……………… 9分

当 $1+a<0$，即 $a<-1$ 时，$f'(0)<0$，又 $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-x^2+a=\tan^2 x+1+a-x^2>\tan^2 x+1+a-\dfrac{\pi^2}{4}$，故存在 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(x_0)>0$，所以存在 $x_1\in(0,x_0)$，使得 $f'(x_1)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，在 $\left(x_1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，故 $f(x_1)<f(0)=0$，不符合题意. ……………… 分

综上，实数 a 的取值范围是 $[-1,+\infty)$. ……………… 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。