2023年普通高校招生考试冲刺压轴卷(一)·理科数学

参考答案、提示及评分细则

1. C　$\because B=\{x|x^2-3x-10>0\}=\{x|x<-2$ 或 $x>5\}$，$\therefore \complement_U B=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$，∴图中阴影部分所表示的集合为 $A\cap(\complement_U B)=\{2,3,5\}$，包含元素的个数为3. 故选C. 来源:高三答案公众号

2. B　$z=\dfrac{4+3i}{2-i}-i=\dfrac{(4+3i)(2+i)}{5}-i=1+i$，$\therefore z\bar{z}=(1+i)(1-i)=2$. 故选B.

3. C　由 $f(-x)+f(x)=-2a$，有 $-2a=3$，可得 $a=-\dfrac{3}{2}$. 故选C.

4. C　由 $a_n=-50+3(n-1)=3n-53$，又 $a_n=3n-53<0$，则 $n<17\dfrac{2}{3}$，所以数列 $\{a_n\}$ 中负数项的个数为17. 故选C.

5. A　依题意，$0.02\times4+0.04\times2+0.10\times3+a+0.20\times2=1$，解得 $a=0.14$. 故选A.

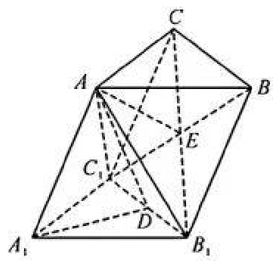
6. A　$\dfrac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta}=\tan\theta=2$. 故选A.

7. C　设圆锥的底面圆的半径为 r cm，根据题意得 $2\pi r=60\pi$，解得 $r=30$.
则圆锥的高 $=\sqrt{50^2-30^2}=40$(cm)，∴此圆锥的体积为 $\dfrac{1}{3}\times\pi\times30^2\times40=12000\pi(\mathrm{cm}^3)$. 故选C.

8. B　∵函数 $f(x)=ax^2+2x+b(a>0)$ 与 x 轴只有一个交点，
$\therefore\Delta=4-4ab=0$，即 $ab=1$. $\because a>0$，$\therefore b>0$.
$\therefore \dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant2\sqrt{\dfrac{4}{a}\cdot\dfrac{1}{b}}=4$，当且仅当 $\dfrac{4}{a}=\dfrac{1}{b}$，即 $a=2$，$b=\dfrac{1}{2}$ 时取等号.
$\therefore \dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为4. 故选B.

9. D　由 $x=\log_2 3^e$，$y=3\log_2 e^3$，$z=\log_2\pi^3$，设 $a=3^e$，$b=e^3$，$c=\pi^3$，因为 $1<e<\pi$，所以 $1<e^3<\pi^3$，所以 $c>b$，
设 $f(t)=\dfrac{\ln t}{t}$，$t>0$，
则 $f'(t)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$，
令 $f'(x)=0\Rightarrow t=e$，
当 $0<t<e$ 时，$f'(t)>0$，当 $t>e$ 时，$f'(t)<0$，
所以 $f(t)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，
因为 $e<3$，所以 $\dfrac{\ln e}{e}>\dfrac{\ln 3}{3}$，
因为 $3^e>0$，所以 $3\ln e>e\ln 3$，即 $\ln e^3>\ln 3^e$，
由函数 $y=\ln t$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，
所以 $e^3>3^e$，即 $b>a$，
所以 $c>b>a$，$z>y>x$. 故选D.

10. B　依题意，易知三棱锥 A_1-ABC_1 为正四面体，选项A正确；
由选项A可知 $BC=B_1C_1=BB_1=CC_1$，侧面 BCC_1B_1 为菱形. 取 B_1C_1 的中点 D，由选项A易知 $B_1C_1\perp$ 平面 ADA_1，$\therefore B_1C_1\perp AA_1$. $\therefore B_1C_1\perp BB_1$，侧面 BCC_1B_1 为正方形. ∴正方形 BCC_1B_1 的面积为1，选项B错误；
由选项C可知四棱锥 $A-BCC_1B_1$ 为正四棱锥，易知 $B_1C\perp BC_1$，$B_1C\perp AE$，$BC_1\cap AE=E$，$\therefore B_1C\perp$ 平面 ABC_1，选项C正确；
由选项C可知 $AE=\dfrac{\sqrt2}{2}$，且 $AE\perp$ 平面 BCC_1B_1，∴三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为



$\dfrac{3}{2}\times V_{A-BCC_1B_1}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{3}\times1\times1\times\dfrac{\sqrt2}{2}=\dfrac{\sqrt2}{4}$，∴选项D正确. 故选B.

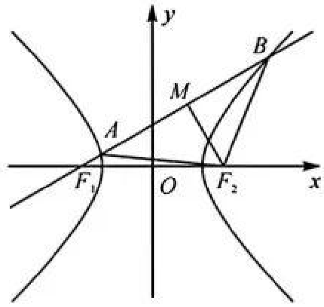
11. C　由图可知，$\dfrac{5}{4}T=\dfrac{5\pi}{6}-\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{5\pi}{4}$，$\therefore T=\pi$，$\therefore\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$. $\therefore f(x)=2\sin(2x+\varphi)$.

L-Y

把点$\left(-\frac{5\pi}{12},-2\right)$代入,得$2\sin\left(\varphi-\frac{5\pi}{6}\right)=-2$. $\therefore \varphi-\frac{5\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 即$\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

$\because |\varphi|<\frac{\pi}{2}$, $\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$. $\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. $\therefore \cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{f(\alpha)}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.

12. A　如图,设$|AF_1|=x$,$|F_1F_2|=2c$.来源:高三答案公众号



$\because a=1$, $\therefore |AF_2|=|BF_2|=x+2$, $\therefore |BF_1|=x+4$, $|AB|=4$.

过点 F_2 作 $F_2M\perp AB$,则 M 为 AB 中点,$\therefore |MF_1|=x+2=|AF_2|$.

$\because \tan\angle MF_1F_2=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{|MF_2|}{|F_1M|}$, $\therefore |MF_2|=c$, $|MF_1|=\sqrt{3}c=|AF_2|$.

$\because |MF_2|^2+|MA|^2=|AF_2|^2$, $\therefore c^2+2^2=(\sqrt{3}c)^2$,解得 $c=\sqrt{2}$.

$\therefore$该双曲线离心率为$\frac{c}{a}=\sqrt{2}$. 故选 A.

13. -2　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}^2=2\times4\times\frac{1}{4}-2^2=-2$.

14. $-\frac{11}{16}$　$\left(32+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^5$ 展开式中常数项为 $32\times\left(-\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{x}C_5^4x^1\left(-\frac{1}{2}\right)^4=-\frac{11}{16}$.

15. $\frac{27}{2}$　设公比为 q,有 $S_{10}=S_5+q^5S_5$,可得 $15=6+6q^5$,有 $q^5=\frac{3}{2}$,可得 $a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=q^{10}S_5=6\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{2}$.

16. -1 或 4　设 $A(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,则 $B(-x_1,-y_1)$.

$\because$点 B,D 都在椭圆 C 上,$\therefore \begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1,\\ \frac{x_2^2}{4}+y_2^2=1,\end{cases}$ 两式相减,得$\frac{x_1^2-x_2^2}{4}+(y_1^2-y_2^2)=0$.

$\therefore \frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}=-\frac{1}{4}$,即 $k_{AD}\cdot k_{BD}=-\frac{1}{4}$.

又$\because k_{AD}+k_{BD}=\frac{3}{4}$, $\therefore k_{BD}=1$ 或$-\frac{1}{4}$.

$\because k\cdot k_{BD}=-1$, $\therefore k=-1$ 或 4.

17. 解:(1)$\because \sin^2C=\sin B(\sin A+\sin B)$, $\therefore c^2=ab+b^2$. ………………………… 1 分

又$\because a=2b$, $c=\sqrt{2b^2+b^2}=\sqrt{3}b$, ………………………… 2 分

$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4b^2+b^2-3b^2}{4b^2}=\frac{1}{2}$. ………………………… 5 分

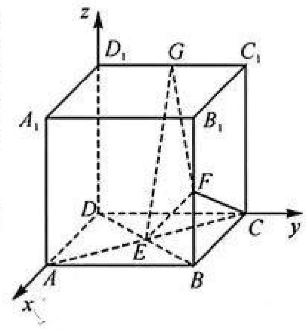
$\therefore C=\frac{\pi}{3}$; ………………………… 6 分

(2)$\because C=\frac{\pi}{3}$,且 $a=2b$, $\therefore a=2$, $b=1$, $c=\sqrt{3}$. $\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………… 8 分

$\because CD$ 平分$\angle ACB$ 交 AB 于点 D,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}CD\cdot BC\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}CD\cdot AC\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,得 $CD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ………………………… 12 分

18. (1)证明:如图,建立空间直角坐标系,设正方体棱长为 2. ………………………… 1 分



$\therefore E(1,1,0)$,$F(2,2,1)$,$C(0,2,0)$. $\therefore \overrightarrow{CF}=(2,0,1)$. ………………………… 2 分

设 $G(0,t,2)$,$0\leqslant t\leqslant 2$,则$\overrightarrow{GE}=(1,1-t,-2)$. ………………………… 3 分

$\therefore \overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{GE}=2-2=0$, $\therefore \overrightarrow{CF}\perp\overrightarrow{GE}$,即 $CF\perp EG$; ………………………… 4 分

(2)解:由(1)知$\overrightarrow{GE}=(1,1-t,-2)$,$\overrightarrow{EF}=(1,1,1)$,

设平面 GEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$. ………………………… 5 分

$\therefore \begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{GE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x+(1-t)y-2z=0,\\ x+y+z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$,

得$\begin{cases} x=\frac{t}{3}-1, \\ y=1, \\ z=-\frac{t}{3}, \end{cases}$ $\therefore n=\left(\frac{t}{3}-1,1,-\frac{t}{3}\right)$. …… 8分

易知平面 BCC_1B_1 的法向量为 $m=(0,1,0)$,

设平面 BCC_1B_1 与平面 EGF 所成的锐二面角为 θ.

$\therefore \cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{t}{3}-1\right)^2+1+\left(-\frac{t}{3}\right)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{2}{9}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}}$, $0\leqslant t\leqslant 2$. …… 11分

$\therefore$ 当 $t=\frac{3}{2}$ 时,$\cos\theta$ 取最大值,平面 BCC_1B_1 与平面 EGF 所成的锐二面角最小. 此时,$\frac{C_1G}{D_1G}=\frac{1}{3}$. …… 12分

19. (1)解:$f'(x)=ae^x-1$. …… 1分

①当 $a>0$ 时,令 $f'(x)>0$ 得 $e^x>\frac{1}{a}$,解得 $x>-\ln a$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减,$(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增; …… 3分

②当 $a<0$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减; …… 4分

(2)证明:因为 $a=1$,$f(x)=e^x-x$, …… 5分

由(1)知,函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0,+\infty)$,减区间为 $(-\infty,0)$, …… 6分

所以 $f(x)\geqslant f(0)=1$,即 $f(x)\geqslant 1$. …… 8分

设 $g(x)=2\ln x-2x+3$,$g'(x)=\frac{2}{x}-2=\frac{2(1-x)}{x}$. …… 9分

由 $g'(x)>0$ 得 $1-x>0$,解得 $0<x<1$.

由 $g'(x)<0$ 得 $1-x<0$,解得 $x>1$,

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $g(x)\leqslant g(1)=1$,

从而 $f(x)>g(x)$ 恒成立(等号不同时成立),即 $f(x)>2\ln x-2x+3$ 恒成立 …… 12分

20. 解:(1)设妻子驾车的天数为随机变量 X,则 X 的可能取值为 0,1,2, …… 1分

则 $P(X=0)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{32}$, …… 2分

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{19}{32}$, …… 3分

$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$, …… 4分

则妻子驾车的天数 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{19}{32}$	$\frac{3}{8}$

则 $E(X)=0\times\frac{1}{32}+1\times\frac{19}{32}+2\times\frac{3}{8}=\frac{43}{32}$; …… 5分

(2)易知 $p_1=\frac{1}{2}$,$p_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$,且 $p_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{3}{4}p_{n-1}\ (n\geqslant 2)$, …… 9分

所以 $p_{n+1}-p_n=-\frac{3}{4}(p_n-p_{n-1})\ (n\geqslant 2)$,

又 $p_2-p_1=\frac{1}{8}$,所以 $p_n-p_{n-1}=\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-2}$, …… 11分

由累加法可知,$p_n=\frac{4}{7}-\frac{1}{14}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$. …… 12分

L-Y

21. 解：(1)设焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，$\therefore |PF|=\sqrt{\left(-1-\frac{p}{2}\right)^2+2^2}=2\sqrt{2}$，解得 $p=2$ 或 $p=-6$(舍去). ……… 2分

$\therefore$抛物线 C 的标准方程为 $y^2=4x$；…… 3分

(2)显然直线 AB 的斜率存在且不为0，设直线 AB 的方程为 $y-2=k(x+1)$.

联立方程 $\begin{cases}y-2=k(x+1),\\ y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x，得 $ky^2-4y+8+4k=0$. 来源:高三答案公众号

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$\therefore y_1+y_2=\frac{4}{k}$，$y_1y_2=\frac{8}{k}+4$. …… 5分

$\therefore 2(y_1+y_2)=y_1y_2-4$. ① …… 6分

直线 AD 的方程为 $y-y_1=x-\frac{y_1^2}{4}$，联立 $\begin{cases}y-y_1=x-\frac{y_1^2}{4},\\ y^2=4x.\end{cases}$

消去 x，得 $y^2-4y+4y_1-y_1^2=0$.

设 $D(x_3,y_3)$，则 $y_1+y_3=4$. $\therefore y_1=4-y_3$，代入①，得 $2(y_2+y_3)=y_2y_3+12$. ② …… 9分

设直线 BD 的解析式为 $x=my+b$.

联立 $\begin{cases}x=my+b,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-4my-4b=0$.

$\therefore y_2+y_3=4m$，$y_2y_3=-4b$. 代入②，得 $b=3-2m$.

$\therefore$直线 BD 的解析式为 $x=my+3-2m$，即 $x-3=m(y-2)$，可知恒过定点(3,2). …… 12分

22. 解：(1)由 $\begin{cases}x=t+1,\\ y=2t\end{cases}$ 消去参数 t 得 $y=2x-2$，即为直线 l 的普通方程， …… 2分

圆 C 的极坐标方程可化为 $\rho^2=4\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta$，

化入 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，$\rho^2=x^2+y^2$，可得 $x^2+y^2=4x+2y$，整理可得 $x^2+y^2-4x-2y=0$，即为圆 C 的直角坐标方程； …… 5分

(2)将直线 l 的参数方程代入圆 C 的直角坐标方程，有 $(t+1)^2+4t^2=4(t+1)+4t$，

化简得 $5t^2-6t-3=0$， …… 7分

记 A，B 对应的参数分别为 t_1，t_2，则 $t_1+t_2=\frac{6}{5}$，$t_1t_2=-\frac{3}{5}$. …… 8分

有 $|MA|=\sqrt{t_1^2+4t_1^2}=\sqrt{5}|t_1|$，$|MB|=\sqrt{5}|t_2|$， …… 9分

可得 $|MA|\cdot|MB|=5|t_1t_2|=5\times\frac{3}{5}=3$. …… 10分

23. 解：(1)①当 $x<-1$ 时，不等式 $f(x)\geqslant 2$ 可化为 $-(x+1)-2x\geqslant 2$，解得 $x\leqslant -1$，故 $x<-1$； …… 1分

②当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，不等式 $f(x)\geqslant 2$ 可化为 $(x+1)-2x\geqslant 2$，解得 $x\leqslant -1$，故 $x=-1$； …… 3分

③当 $x>0$ 时，不等式 $f(x)\geqslant 2$ 可化为 $(x+1)+2x\geqslant 2$，解得 $x\geqslant\frac{1}{3}$，故 $x\geqslant\frac{1}{3}$. …… 4分

由上知不等式 $f(x)\geqslant 2$ 的解集为 $(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$； …… 5分

(2)由 $f(x)\geqslant|x+1|+|x|\geqslant|(x+1)-x|=1$，可知 $m=1$， …… 7分

有 $a^2+b^2+c^2=\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+2^2)\geqslant\frac{1}{6}(a+b+2c)^2=\frac{1}{6}$，

故 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值为 $\frac{1}{6}$. …… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。