机密★启用前　　【考试时间：4月25日　　15：00—17：00】

昆明市第一中学郑重声明：严禁提前考试、发放及网络传播试卷，违反此规定者取消其联考资格，并追究经济和法律责任；对于首位举报者，经核实奖励2000元。举报电话：0871－65325731

昆明市第一中学2023届高中新课标高三第九次考前适应性训练
数学试卷

命题人：昆一中数学命题小组

审题人：杨昆华　彭力　顾先成　莫利琴　孙思应　梁云虹　丁茵　张远雄　崔锦　秦绍卫

本试卷共4页，22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{(x,\ y)\mid x+y=1\}$，$B=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2=1\}$，则 $A\cap B$ 的真子集个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 已知复数 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，则 $z+z^2+z^3+\cdots+z^{2023}=$

A. -1　　B. 1　　C. $-\mathrm{i}$　　D. i

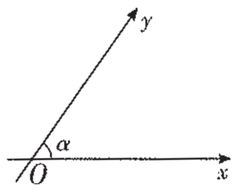
3. 设 $(2x+3)^{10}=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_{10}(x+1)^{10}$，则 a_0 的值等于

A. 0　　B. 1　　C. 3^{10}　　D. 5^{10}

4. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，直线 $y=kx$ 与椭圆 C 交于 A，B 两点，若 $|AB|=|F_1F_2|$，则 $\triangle ABF_1$ 的面积等于

A. 18　　B. 10　　C. 9　　D. 6

5. 如图，当 $\angle xOy=\alpha\left[\alpha\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)\right]$ 时，定义平面坐标系 xOy 为 α－仿射坐标系，在 α－仿射坐标系中，任意一点 M 的斜坐标这样定义：若 $\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，其中 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 分别为与 x 轴、y 轴正方向相同的单位向量，则 M 的斜坐标为 $(x,\ y)$．在 α－仿射坐标系中，若 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，M 的斜坐标为 $(2,\ -1)$，则 O 到 M 的距离为



A. 1　　B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{5}$　　D. 3

6. 已知函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足 $f(x)-f(2-x)=0$，则

A. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,\ 1)$ 对称　　B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称

C. 函数 $f'(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称　　D. 函数 $f'(x)$ 的图象关于点 $(1,\ 0)$ 对称

7. 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AC=AA_1=2\sqrt{2}$，P 为 BC 中点，$AP=\dfrac{1}{2}BC$，Q 为 A_1C_1 上一点，$A_1Q=\dfrac{1}{2}A_1C_1$，则经过 A，P，Q 三点的平面截此三棱柱所成截面的面积是

A. $\dfrac{7}{2}$　　B. 4　　C. $\dfrac{9}{2}$　　D. 5

8. 若 $0<x_1<x_2<1<x_3<x_4$，则

A. $\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}<\ln x_1-\ln x_2$　　B. $\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}>\ln x_1-\ln x_2$

C. $x_3\mathrm{e}^{x_4}<x_4\mathrm{e}^{x_3}$　　D. $x_3\mathrm{e}^{x_4}>x_4\mathrm{e}^{x_3}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 已知平面 α，β，直线 m，n 满足 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则下列说法正确的是

A. 若 $\alpha/\!/\beta$，则 $m/\!/n$

B. 若 $m/\!/\beta$，$m\subset$ 平面 γ，$n\subset$ 平面 γ，则 $m/\!/n$

C. 若 $\alpha\perp\beta$，则 $m\perp n$

D. 若 $\alpha\cap\beta=l$，$m\perp l$，$n\perp l$，$m\perp n$，则 $\alpha\perp\beta$

10. 若函数 $f(x)=\sin^4x+\cos^4x$，则

A. 函数 $f(x)$ 的一条对称轴为 $x=\dfrac{\pi}{4}$　　B. 函数 $f(x)$ 的一个对称中心为 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 0\right)$

C. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$　　D. 若函数 $g(x)=8\left[f(x)-\dfrac{3}{4}\right]$，则 $g(x)$ 的最大值为2

11. 已知函数 $f(x)=x^3-mx-n$，其中 m，$n\in\mathbf{R}$，下列选项中，能使函数 $y=f(x)$ 有且仅有一个零点的是

A. $m=-1$，$n=1$　　B. $m=0$，$n=1$

C. $m=3$，$n=2$　　D. $m=3$，$n=-3$

12. “牟合方盖”是由我国古代数学家刘徽首先发现并采用的一种用于计算球体体积的方法，当一个正方体用圆柱从纵横两侧面作内切圆柱体时，两圆柱体的公共部分即为“牟合方盖”，他提出“牟合方盖”的内切球的体积与“牟合方盖”的体积比为定值．南北朝时期祖暅提出理论：“缘幂势既同，则积不容异”，即“在等高处的截面面积总是相等的几何体，它们的体积也相等”，并算出了“牟合方盖”和球的体积．其大体思想可用如图表示，其中图1为棱长为 $2r$ 的正方体截得的“牟合方盖”的八分之一，图2为棱长为 $2r$ 的正方体的八分之一，图3是以底面边长为 r 的正方体的一个底面和底面以外的一个顶点作的四棱锥，则根据祖暅原理，下列结论正确的是：

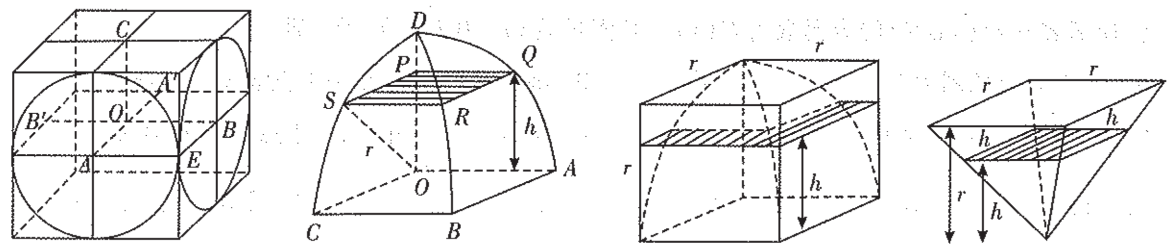


图 1　　图 2　　图 3

A. 若以一个平行于正方体上下底面的平面，截“牟合方盖”，截面是一个圆形

B. 图 2 中阴影部分的面积为 h^2

C. “牟合方盖”的内切球的体积与“牟合方盖”的体积比为 $\pi:4$

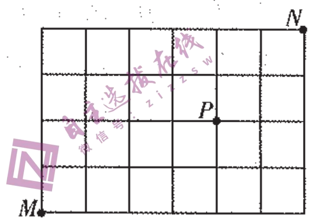
D. 由棱长为 $2r$ 的正方体截得的“牟合方盖”体积为 $\frac{16}{3}r^3$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知随机变量 $X\sim N(25,\delta^2)$，若 $P(23<X<26)=0.4$，则 $P(24<X<27)=$__________.

14. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{3-a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_n=$__________.

15. 右图是某市区的街道网，它由 24 个全等的小正方形构成，每个小正方形的边界都是街道道路，小正方形的内部都是不能通行的高楼建筑．小张家居住在街道网格的 M 处，她的工作单位在街道网格的 N 处，每天早上她从家出发，沿着街道道路去单位上班，若她要选择最短路径前往，则小张上班途经街道 P 处的概率是__________.



16. 在平面直角坐标系中，已知 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$是圆 $x^2+y^2=12$ 上的两个动点，O 是坐标原点，且$\angle POQ=60^\circ$，则$|x_1+y_1-4\sqrt{2}|+|x_2+y_2-4\sqrt{2}|$的最小值是__________.

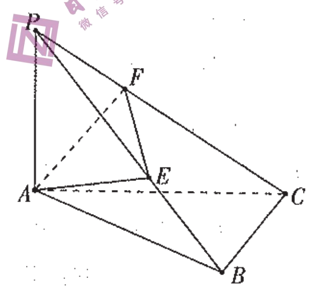
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$PA\perp$平面 ABC.

(1)证明：平面 $PBC\perp$平面 PAB；

(2)若 $PA=AB=BC$，点 E，F 分别在线段 PB，PC 上，且$\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PF}$，$\overrightarrow{PE}=2\overrightarrow{EB}$，求平面 AEF 与平面 ABC 夹角的余弦值．



18. (12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对边分别为 a，b，c，点 O 为$\triangle ABC$ 的内心，记$\triangle OBC$，$\triangle OAC$，$\triangle OAB$ 的面积分别为 S_1，S_2，S_3，已知 $S_1^2+S_3^2-S_1S_3=S_2^2$，$AB=2$.

(1)若$\triangle ABC$ 为锐角三角形，求 AC 的取值范围；

(2)在①$4\sin B\sin A+\cos 2A=1$；②$\frac{1-2\cos A}{\sin A}+\frac{1-2\cos B}{\sin B}=0$；③$a\cos C+c\cos A=1$ 中选一个作为条件，判断$\triangle ABC$ 是否存在，若存在，求出$\triangle ABC$ 的面积，若不存在，说明理由．(注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．)

19. (12 分)

设正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设数列$\{b_n\}$满足 $b_1=1$，且 $b_{n+1}-b_n=2^{n-1}\cdot a_n$，求数列$\{b_n\}$的通项公式．

20. (12 分)

某商场周年庆期间举行了一场抽奖活动，该商场在宣传时对外宣称他们的抽奖活动中奖率为 90%，现从抽奖的顾客中随机抽取 10 人，计中奖的人数为 X.

(1)若 $X=7$，从这 10 人中随机抽取 3 人进行采访，设被抽中的中奖人数为 Y，求 Y 的分布列和数学期望；

(2)若 $X\leqslant 6$，你是否怀疑商场的宣传？并说明理由．[附：$(0.9)^5\approx 0.590$，$(0.9)^6\approx 0.531$，$(0.9)^7\approx 0.478$，$(0.9)^8\approx 0.430$，$(0.9)^9\approx 0.387$，$(0.9)^{10}\approx 0.349$．]

21. (12 分)

已知函数$f(x)=\frac{ax\ln x-x^2-x}{x+1}$在 $x=1$ 处切线斜率为 $-\frac{1}{2}$，$g(x)=\frac{x\ln x+bx^2-bx}{x-1}$，其中 a，$b\in\mathbf{R}$.

(1)求 a 的值；

(2)若 $x>1$ 时，$f(x)+g(x)<0$，求 b 的取值范围．

22. (12 分)

椭圆方程 Γ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，平面上有一点 $P(x_0,y_0)$．定义直线方程 l：$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ 是椭圆 Γ 在点 $P(x_0,y_0)$处的极线．已知椭圆方程 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，

(1)若 $P(1,y_0)$在椭圆 C 上，求椭圆 C 在点 P 处的极线方程；

(2)若 $P(x_0,y_0)$在椭圆 C 上，证明：椭圆 C 在点 P 处的极线就是过点 P 的切线；

(3)若过点 $P(-4,0)$分别作椭圆 C 的两条切线和一条割线，切点为 X，Y，割线交椭圆 C 于 M，N 两点，过点 M，N 分别作椭圆 C 的两条切线，且相交于点 Q．证明：Q，X，Y 三点共线．