

2023 年宝鸡市高考模拟检测（二）

数学（理科）答案

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	D	B	A	C	B	C	C	B	A	B	C

二、填空题：

13. $g(x) = 2\cos 2x$ 14. $[\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1]$ 15. $\{a|a \leq 2\}$ 16. ①③④

解答题答案

17. 解：（I）由 $(0.004 \times 2 + 0.022 + 0.030 + 0.028 + m) \times 10 = 1$ ，解得 $m = 0.012$ 。

（II）由题意知不低于 80 分的队伍有 $50 \times (0.12 + 0.04) = 8$ 支，

不低于 90 分的队伍有 $50 \times 0.04 = 2$ 支。

随机变量 X 的可能取值为 0, 1, 2。

$$\because P(X=0) = \frac{C_6^2}{C_8^3} = \frac{5}{14}, \quad P(X=1) = \frac{C_6^2 C_2^1}{C_8^3} = \frac{15}{28}, \quad P(X=2) = \frac{C_6^1 C_2^2}{C_8^3} = \frac{3}{28},$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

$$E(X) = 0 \times \frac{5}{14} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{3}{28} = \frac{3}{4}.$$

18.（1）证明：因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $CD \subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $PD \perp CD$ ，

因为 $AD \perp CD$ ， $AD \cap PD = D$ ， $AD, PD \subset$ 平面 PAD ，

所以 $CD \perp$ 平面 PAD ，

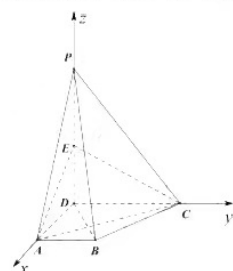
因为 E 为棱 PD 上一点，

所以 $AE \subset$ 平面 PAD ，

所以 $CD \perp AE$ 。

（2）解：因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AD \perp CD$ ，

所以 DA, DC, DP 两两垂直，如图，建立空间直角坐标系，



因为 $CD = 2AB = 2AD = 2$, $PD = 4$,

所以 $A(1, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $E(0, 0, 2)$, $P(0, 0, 4)$,

所以 $\overrightarrow{EA} = (1, 0, -2)$, $\overrightarrow{EC} = (0, 2, -2)$,

设平面 AEC 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{EA} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{EC} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}, \text{ 令 } z = 1 \text{ 得 } \vec{n} = (2, 1, 1),$$

因为 $PD \perp AD$, $AD \perp CD$, $PD \cap CD = D$, $PD, CD \subset \text{平面 } PCD$,

所以 $AD \perp \text{平面 } PCD$.

所以平面 PCE 的一个法向量为 $\vec{m} = \overrightarrow{DA} = (1, 0, 0)$,

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

因为二面角 $A-EC-P$ 为钝二面角,

所以二面角 $A-EC-P$ 的余弦值为: $-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

$$19. \text{ 解: (1) } \because f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x,$$

等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $f(n) - c = \left(\frac{1}{3}\right)^n - c$,

$$\therefore a_1 = f(1) - c = \frac{1}{3} - c, \quad a_2 = [f(2) - c] - [f(1) - c] = -\frac{2}{9},$$

$$a_3 = [f(3) - c] - [f(2) - c] = -\frac{2}{27},$$

数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 应有 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = q$, 解得 $c = 1$, $q = \frac{1}{3}$.

$$\therefore \text{首项 } a_1 = f(1) - c = \frac{1}{3} - c = -\frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{等比数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$\therefore S_n - S_{n-1} = (\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}) = \sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} (n \geq 2),$$

又 $b_n > 0$, $\sqrt{S_n} > 0$, $\therefore \sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = 1$;

$\therefore$ 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 构成一个首项为 1, 公差为 1 的等差数列,

$\therefore \sqrt{S_n} = 1 + (n-1) \times 1 = n$,

$\therefore S_n = n^2$, 当 $n=1$ 时, $b_1 = S_1 = 1$,

当 $n \geq 2$ 时, $b_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$,

又 $n=1$ 时也适合上式,

$\therefore \{b_n\}$ 的通项公式 $b_n = 2n-1$.

$$(II) \quad \frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\therefore T_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1},$$

由 $T_n > \frac{1010}{2023}$, 得 $\frac{n}{2n+1} > \frac{1010}{2023}$, 得 $n > 336.6$,

故满足 $T_n > \frac{1010}{2023}$ 的最小正整数为 337.

20. 解: (1) 依题意可知 $\sqrt{7}|\overrightarrow{AF}| = 2|\overrightarrow{AB}|$, 即 $\sqrt{7}a = 2\sqrt{a^2 + b^2}$,

由右顶点为 $B(2, 0)$, 得 $a = 2$, 解得 $b^2 = 3$,

所以 C_1 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 依题意可知 C_2 的方程为 $y^2 = -4x$, 假设存在符合题意的直线,

设直线方程为 $x = ky - 1$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $M(x_3, y_3)$, $N(x_4, y_4)$,

$$\text{联立方程组} \begin{cases} x = ky - 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{得} (3k^2 + 4)y^2 - 6ky - 9 = 0,$$

由韦达定理得 $y_1 + y_2 = \frac{6k}{3k^2 + 4}$, $y_1 y_2 = \frac{-9}{3k^2 + 4}$,

$$\text{则 } |y_1 - y_2| = \frac{12\sqrt{k^2 + 1}}{3k^2 + 4},$$

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} x = ky - 1 \\ y^2 = -4x \end{cases}, \text{ 得 } y^2 + 4ky - 4 = 0,$$

由韦达定理得 $y_3 + y_4 = -4k$, $y_3 y_4 = -4$,

所以 $|y_3 - y_4| = 4\sqrt{k^2 + 1}$, 若 $S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} S_{\triangle OMN}$,

$$\text{则 } |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} |y_3 - y_4|, \text{ 即 } \frac{12\sqrt{k^2 + 1}}{3k^2 + 4} = 2\sqrt{k^2 + 1}, \text{ 解得 } k = \pm \frac{\sqrt{6}}{3},$$

所以存在符合题意的直线方程为 $x + \frac{\sqrt{6}}{3}y + 1 = 0$ 或 $x - \frac{\sqrt{6}}{3}y + 1 = 0$.

21. 解: (1) $f'(x) = \ln x + ax$, 因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有两个极值点,

所以 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有两个零点, 即方程 $\ln x + ax = 0$ 有两个正实根,

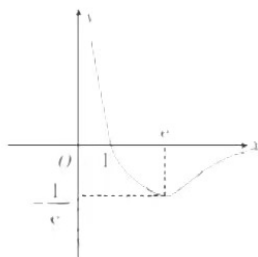
即 $a = -\frac{\ln x}{x}$ 有两个正实根,

$$\text{令 } g(x) = -\frac{\ln x}{x}, \quad g'(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2},$$

当 $x \in (0, e)$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递减,

当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增,

又 $g(e) = -\frac{1}{e}$, 画出函数 $g(x)$ 的图象如图所示,



由方程 $a = -\frac{\ln x}{x}$ 有两个根, 得 $-\frac{1}{e} < a < 0$.

(2) 证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有两个极值点 x_1, x_2 , 由 (1) 可知,

$$\begin{cases} \ln x_1 + ax_1 = 0 \\ \ln x_2 + ax_2 = 0 \end{cases}, \text{ 则 } a = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_2 - x_1},$$

要证 $a + \frac{2}{x_1 + x_2} < 0$, 只需 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_2 - x_1} + \frac{2}{x_1 + x_2} < 0$,

进一步化为 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_2 - x_1} < -\frac{2}{x_1 + x_2}$,

从而得 $\ln x_1 - \ln x_2 < \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2}$, 所以 $\ln \frac{x_1}{x_2} < \frac{2\left(\frac{x_1}{x_2} - 1\right)}{\frac{x_1}{x_2} + 1}$,

设 $t = \frac{x_1}{x_2}$, 可知 t 的取值范围是 $(0, 1)$, 则只需证 $\ln t < \frac{2(t-1)}{t+1}$,

令 $h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$, 则 $h'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$,

所以 $h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 从而 $h(t) < h(1) = 0$,

因此 $a + \frac{2}{x_1 + x_2} < 0$.

22. 解: (1) 因为 $\begin{cases} x = 2t - \frac{1}{6t} \\ y = 2t + \frac{1}{6t} \end{cases}$ (t 为参数),

所以 $\begin{cases} x^2 = 4t^2 + \frac{1}{36t^2} - \frac{2}{3} \\ y^2 = 4t^2 + \frac{1}{36t^2} + \frac{2}{3} \end{cases}$,

所以曲线 C 的普通方程为 $y^2 - x^2 = \frac{4}{3}$,

因为 $\rho \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 1$,

所以 $\rho \cos \theta - \sqrt{3} \rho \sin \theta = 2$,

因为 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$,

所以直线 l 的直角坐标方程为 $x - \sqrt{3}y - 2 = 0$.

$$(2) \text{ 由 (1) 可得直线 } l \text{ 的参数方程 } \begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}s \\ y = \frac{1}{2}s \end{cases} \quad (s \text{ 为参数}),$$

$$\text{所以 } \left(\frac{1}{2}s\right)^2 - \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}s\right)^2 = \frac{4}{3},$$

$$\text{整理得 } 3s^2 + 12\sqrt{3}s + 32 = 0,$$

$$\text{设 } |PM| = -s_1, \quad |QM| = -s_2,$$

$$\text{则 } s_1 + s_2 = -4\sqrt{3}, \quad s_1 s_2 = \frac{32}{3},$$

$$\text{所以 } \|PM\| - \|QM\| = \sqrt{(s_1 + s_2)^2 - 4s_1 s_2} = \sqrt{48 - \frac{128}{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

23. 解: (1) 由题设知: $|x+1| + |x-1| < 3$;

① 当 $x > 1$ 时, 得 $f(x) = x+1+x-1 = 2x$, $2x < 3$, 解得 $1 < x < \frac{3}{2}$;

② 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 得 $f(x) = x+1+1-x = 2$, $2 < 3$, 恒成立;

③ 当 $x < -1$ 时, 得 $f(x) = -x-1-x+1 = -2x$, $-2x < 3$, 解得 $-\frac{3}{2} < x < -1$;

所以不等式的解集为: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$;

(2) 由二次函数 $y = -x^2 - 2x + m = -(x+1)^2 + 1 + m$,

该函数在 $x = -1$ 取得最大值 $1 + m$,

$$\text{因为 } f(x) = \begin{cases} -2x(x < -1) \\ 2(-1 \leq x \leq 1) \\ 2x(x > 1) \end{cases},$$

所以在 $x = -1$ 处取得最小值 2,

■■■■

所以要使二次函数 $y = -x^2 - 2x + m$ 与函数 $y = f(x)$ 的图象恒有公共点,

只需 $m+1 \geq 2$, 即 $m \geq 1$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线