枣庄市2023届高三模拟考试

数学参考答案及评分标准

2023.03

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1-4. BCAD　　5-8. DBAB

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. BC　　10. AC　　11. BCD　　12. ACD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. $(-2\sqrt{5},0)\cup(0,2\sqrt{5})$ 范围内的任意一个数均正确（给出多个值或范围的不得分）

14. 8　　15. 17.8　　16. $x+3y+3=0$

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：(1)由 $\boldsymbol{n}=(\cos(\frac{\pi}{2}-B),\cos(\pi-A))$ 得 $\boldsymbol{n}=(\sin B,-\cos A)$，

又 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，所以 $a\sin B-\sqrt{3}b\cos A=0$. ………… 2分

由正弦定理得 $\sin A\sin B-\sqrt{3}\sin B\cos A=0$，

又 $\sin B\neq 0$，

所以 $\sin A-\sqrt{3}\cos A=0$，即 $\tan A=\sqrt{3}$. ………… 4分

又 A 为 $\triangle ABC$ 的内角，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………… 5分

(2)由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$ 得，$\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}b\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，

解得 $b=2$. ………… 8分

又根据余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2^2+3^2-2\times 2\times 3\times\frac{1}{2}=7$，

所以 $a=\sqrt{7}$. ………… 10分

18. 解：（1）由 $a_{n+1}+2a_n=2^{n+2}$ 可得 $a_{n+1}-2^{n+1}=2^{n+1}-2a_n=-2(a_n-2^n)$. ……… 3 分

又 $a_1-2^1=1\neq 0$，所以 $\left\{a_n-2^n\right\}$ 是以 -2 为公比，1为首项的等比数列. ……… 4 分

（2）由（1）可得 $a_n-2^n=\left(-2\right)^{n-1}$，即 $a_n=2^n+\left(-2\right)^{n-1}$. ……………………………… 6 分

当 n 为奇数时，$b_n=a_n=2^n+(-2)^{n-1}=3\times 2^{n-1}$；

当 n 为偶数时，$b_n=\log_2 a_n=\log_2\left[2^n+(-2)^{n-1}\right]=\log_2 2^{n-1}=n-1$. ………… 8 分

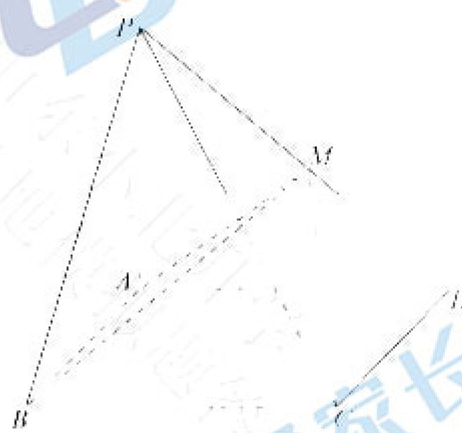
所以 $T_{10}=(b_1+b_3+b_5+b_7+b_9)+(b_2+b_4+b_6+b_8+b_{10})$

$$=(3+3\times 2^2+3\times 2^4+3\times 2^6+3\times 2^8)+(1+3+5+7+9)$$

$$=\frac{3(1-4^5)}{1-4}+\frac{(1+9)\times 5}{2}=1048$$ ……………………………………… 12 分

19. 解：（1）证明：因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp CD$. ………………………… 1 分



因为 $CD\perp AD$，$PA\cap AD=A$，

$PA\subset$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD，

所以 $CD\perp$ 平面 PAD.

…………………………………………………………………………………………………… 2 分

因为 $AM\subset$ 平面 PAD，所以 $AM\perp CD$.

又 $AM\perp MC$，$CD\cap MC=C$，$CD\subset$ 平面 PCD，$MC\subset$ 平面 PCD，

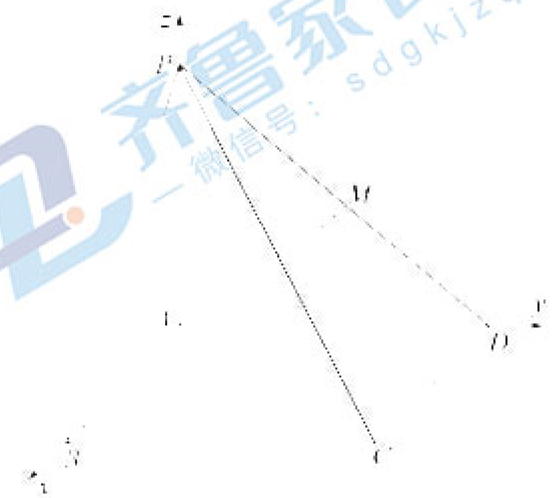
所以 $AM\perp$ 平面 PCD. ……………………………………………………………… 4 分

又 $PD\subset$ 平面 PCD，所以 $AM\perp PD$.

又因为 $PA=AD$，所以 M 为 PD 的中点. ……………………………………………… 6 分

(2) 以 A 为坐标原点，AB，AD，AP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，

建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $AB=t\,(t>0)$，则 $M(0,4,4)$，$C(t,8,0)$

$B(t,0,0)$. ……………………………………7 分

设平面 BAM 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

因为 $\overrightarrow{AB}=(t,0,0)$，$\overrightarrow{AM}=(0,4,4)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=tx_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=4y_1+4z_1=0.\end{cases}$

令 $y_1=1$，则 $\boldsymbol{n}=(0,1,-1)$. ……………………………………………………………………8 分

设平面 CAM 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，因为 $\overrightarrow{AC}=(t,8,0)$，$\overrightarrow{AM}=(0,4,4)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=tx_2+8y_2=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AM}=4y_2+4z_2=0.\end{cases}$

令 $y_2=1$，得 $\boldsymbol{m}=(-\frac{8}{t},1,-1)$. ……………………………………………………………10 分

设平面 BAM 与平面 CAM 夹角为 α，

则 $\cos\alpha=|\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{64}{t^2}+2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

解得 $t=4$，即 $AB=4$. …………………………………………………………………………12 分

20. 解：(1) 设“有女生参加活动”为事件 A，“恰有一名女生参加活动”为事件 B.

则 $P(AB)=P(B)=\dfrac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\dfrac{8}{15}$，$P(A)=\dfrac{C_4^1C_2^1+C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{3}{5}$，……………………………2 分

所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{8}{15}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{8}{9}$. ……………………………………………………3 分

（2）**方法一** “选取的两人中女生人数为i”记为事件M_i，$i=0,1,2$.

则$P(M_0)=\dfrac{C_4^2}{C_6^2}=\dfrac{2}{5}$，$P(M_1)=\dfrac{C_4^1\cdot C_2^1}{C_6^2}=\dfrac{8}{15}$，$P(M_2)=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{15}$.…………6 分

由题意知X的可能值为20，30，40，50，60，“得分为20，30，40，50，60分”

分别记为事件N_{20}，N_{30}，N_{40}，N_{50}，N_{60}，则

$P(N_{40}|M_0)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，$P(N_{50}|M_0)=2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，$P(N_{60}|M_0)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$；

$P(N_{30}|M_1)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，$P(N_{40}|M_1)=2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，$P(N_{50}|M_1)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$；

$P(N_{20}|M_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，$P(N_{30}|M_2)=2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，$P(N_{40}|M_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$.

$P(X=20)=P(M_2N_{20})=P(M_2)\cdot P(N_{20}|M_2)=\dfrac{1}{15}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{60}$；……………………7 分

$$P(X=30)=P(M_1N_{30})+P(M_2N_{30})=P(M_1)\cdot P(N_{30}|M_1)+P(M_2)\cdot P(N_{30}|M_2)$$

$=\dfrac{8}{15}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{15}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$；……………………………………………………8 分

$$P(X=40)=P(M_0N_{40})+P(M_1N_{40})+P(M_2N_{40})$$

$$=P(M_0)\cdot P(N_{40}|M_0)+P(M_1)\cdot P(N_{40}|M_1)+P(M_2)\cdot P(N_{40}|M_2)$$

$=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{8}{15}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{15}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{23}{60}$；……………………………………9 分

$$P(X=50)=P(M_0N_{50})+P(M_1N_{50})=P(M_0)\cdot P(N_{50}|M_0)+P(M_1)\cdot P(N_{50}|M_1)$$

$=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{8}{15}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3}$；……………………………………………………10 分

$P(X=60)=P(M_0N_{60})=P(M_0)\cdot P(N_{60}|M_0)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{10}$.…………………………11 分

所以X的分布列为

X	20	30	40	50	60
P	$\dfrac{1}{60}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{23}{60}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{10}$

所以 $E(X)=20\times\frac{1}{60}+30\times\frac{1}{6}+40\times\frac{23}{60}+50\times\frac{1}{3}+60\times\frac{1}{10}=\frac{130}{3}$. .... 12 分

方法二 根据题意，一名女生参加活动可获得分数的期望为 $\frac{1}{2}\times10+\frac{1}{2}\times20=15$，

一名男生参加活动可获得分数的期望为 $\frac{1}{2}\times20+\frac{1}{2}\times30=25$. .... 6 分

设恰有 Y 名女生参加活动，则男生有 $2-Y$ 名参加活动，

$X=15Y+25(2-Y)=50-10Y$ .... 7 分

$P(Y=0)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$， .... 8 分

$P(Y=1)=\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$， .... 9 分

$P(Y=2)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$. .... 10 分

所以 Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

则有 $E(Y)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$. .... 11 分

所以 $E(X)=E(50-10Y)=50-10\times\frac{2}{3}=\frac{130}{3}$. .... 12 分

21. 解：（1）由题意知 $\begin{cases}\frac{b^2}{a^2}=3\\a^2+b^2=4\end{cases}$， .... 2 分

解得 $\begin{cases}a^2=1\\b^2=3\end{cases}$. .... 3 分

故 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$. .... 4 分

（2）假设存在 $P(n,0)(n\neq 2)$ 满足题意，设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，

由题意知，直线 AB 不与 x 轴重合，设直线 $AB:x=my+2$，

联立 $\begin{cases} x=my+2 \\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，

得 $(3m^2-1)y^2+12my+9=0$．

则 $3m^2-1\neq 0$，$\Delta=36(m^2+1)>0$．

且 $y_1+y_2=-\dfrac{12m}{3m^2-1}$， $y_1y_2=\dfrac{9}{3m^2-1}$． ……………………………………6 分

方法一 因为 $\dfrac{|AF|}{|BF|}=\dfrac{|AP|}{|BP|}$，所以 PF 是 $\angle APB$ 的角平分线，

则 $k_{PA}+k_{PB}=0$， ……………………………………………………………………8 分

即 $\dfrac{y_1}{x_1-n}+\dfrac{y_2}{x_2-n}=0$，

则 $y_1(my_2+2-n)+y_2(my_1+2-n)=0$，

整理得 $2my_1y_2+(2-n)(y_1+y_2)=0$． ……………………………………………10 分

故 $\dfrac{18m}{3m^2-1}-\dfrac{12m(2-n)}{3m^2-1}=0$，化简得：$m\cdot(2n-1)=0$ (*)， ……………………11 分

所以当 $n=\dfrac{1}{2}$ 时， (*) 式总成立，此时 $P(\dfrac{1}{2},0)$．

故存在 $P(\dfrac{1}{2},0)$ 满足题意． ……………………………………………………12 分

方法二 $|AP|^2=(x_1-n)^2+y_1^2=(my_1+2-n)^2+y_1^2$

$=(m^2+1)y_1^2+2m(2-n)y_1+(2-n)^2$，

同理 $|BP|^2=(m^2+1)y_2^2+2m(2-n)y_2+(2-n)^2$．

过 A,B 两点向 x 轴做垂线，易得 $\dfrac{|AF|}{|BF|}=\dfrac{|y_1|}{|y_2|}$

所以 $\dfrac{|AF|^2}{|BF|^2}=\dfrac{|AP|^2}{|BP|^2}$，即 $\dfrac{(m^2+1)y_1^2+2m(2-n)y_1+(2-n)^2}{(m^2+1)y_2^2+2m(2-n)y_2+(2-n)^2}=\dfrac{y_1^2}{y_2^2}$.

………………………………………………………………………………8 分

化简得 $2m(2-n)y_1y_2(y_2-y_1)=(2-n)^2(y_1^2-y_2^2)$.

又因为 $n\neq 2, y_1\neq y_2$，整理得 $2my_1y_2+(2-n)(y_1+y_2)=0$. …………………10 分

故 $\dfrac{18m}{3m^2-1}-\dfrac{12m(2-n)}{3m^2-1}=0$，化简得：$m\cdot(2n-1)=0\ (*)$，…………………11 分

所以当 $n=\dfrac{1}{2}$ 时，$(*)$ 式总成立，此时 $P(\dfrac{1}{2},0)$.

故存在 $P(\dfrac{1}{2},0)$ 满足题意. ………………………………………………………12 分

22. 证明：（1）证明：$f(x)=e^x\sin x-x$，则 $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)-1$，……1 分

令 $g(x)=f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)-1$，则 $g'(x)=2e^x\cos x$.

当 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，$g'(x)=2e^x\cos x\geqslant 0$，故 $f'(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

又 $f'(0)=0$，故 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ 上单调递减，$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

又 $f(0)=0$，所以 $f(x)=e^x\sin x-x\geqslant f(0)=0$；………………………………2 分

当 $x<-\dfrac{\pi}{2}$ 时，$0<e^x<1$，$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，故 $-1<e^x\sin x<1$，又 $-x>\dfrac{\pi}{2}>1$，

所以 $f(x)=e^x\sin x-x>0$ 在 $x<-\dfrac{\pi}{2}$ 时恒成立；………………………………3 分

综上，当 $x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f\left(x\right)\geqslant 0$. ……………………………………………………4 分

（2）① 由（1）知 $f\left(x\right)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2}]$ 内无零点，则 $x_{n+1}>x_n>\dfrac{\pi}{2}>1$，$n\in\mathbf{N}^*$

由 $f\left(x_{n+1}\right)=f(x_n)=0$ 知 $\sin x_n=\dfrac{x_n}{e^{x_n}}$，$\sin x_{n+1}=\dfrac{x_{n+1}}{e^{x_{n+1}}}$. ………………………6 分

令 $h(x)=\dfrac{x}{e^x},x>\dfrac{\pi}{2}$，则 $h'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(\dfrac{\pi}{2},+\infty)$ 上单调递减，

又 $x_{n-1}>x_n>\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $h(x_n)>h(x_{n+1})$，即 $\sin x_n>\sin x_{n+1}$ ……………………………………………………7 分

② 当 $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，$g'(x)=2e^x\cos x<0$，$g\left(x\right)$ 在 $(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 上单调递减

$g(\dfrac{\pi}{2})=e^{\frac{1}{2}\pi}-1>0$，$g\left(\pi\right)=-e^{\pi}-1<0$；所以 $\exists(x_1)_0\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，使得 $g(x_1)_0=0$

当 $\dfrac{\pi}{2}<x<(x_1)_0$ 时，$f(x)$ 单调递增；当 $(x_1)_0<x<\pi$ 时，$f(x)$ 单调递减；

易证 $e^x-x\geqslant 1>0$，故 $f(\dfrac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}-\dfrac{\pi}{2}>0$，又 $f(\pi)=-\pi<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 有且只有一个零点，记为 x_1；……………………………………8 分

当 $(2n-1)\pi\leqslant x\leqslant 2n\pi$ $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$\sin x\leqslant 0$，$e^x>0$

故 $f\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$ 在 $[(2n-1)\pi,2n\pi]$ 无零点；……………………………………9 分

当 $2n\pi \leqslant x \leqslant (2n+\frac{1}{2})\pi$， $n\in\mathbf{N}^*$ 时， $g'(x)=2e^x\cos x \geqslant 0$，

故 $g(x)$ 在 $[2n\pi,(2n+\frac{1}{2})\pi]$ 上单调递增；

当 $(2n+\frac{1}{2})\pi \leqslant x \leqslant (2n+1)\pi$， $n\in\mathbf{N}^*$， $g'(x)=2e^x\cos x \leqslant 0$，

故 $g(x)$ 在 $[(2n+\frac{1}{2})\pi,(2n+1)\pi]$ 上单调递减；

又 $g(2n\pi)=e^{2n\pi}-1>0$， $g((2n+\frac{1}{2})\pi)=e^{(2n+\frac{1}{2})\pi}-1>0$，

$g((2n+1)\pi)=-e^{(2n+1)\pi}-1<0$；

所以 $\exists (x_{n+1})_0 \in (2n\pi,(2n+1)\pi)$，使得 $g\left((x_{n+1})_0\right)=0$；

故当 $2n\pi \leqslant x \leqslant (x_{n+1})_0$ 时， $g(x)=f'(x)\geqslant 0$， $f(x)$ 单调递增；

当 $(x_{n-1})_0 < x \leqslant (2n+1)\pi$ 时， $g(x)=f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减.

又 $f(2n\pi)=-2n\pi<0$， $f((2n+1)\pi)=-(2n+1)\pi<0$，

$f((2n+\frac{1}{2})\pi)=e^{(2n+\frac{1}{2})\pi}-(2n+\frac{1}{2})\pi>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(2n\pi,(2n+\frac{1}{2})\pi)$，$((2n+\frac{1}{2})\pi,(2n+1)\pi)$ $n\in\mathbf{N}^*$ 各有一个零点，

$f(x)$ 在 $(2n\pi,(2n+1)\pi),n\in\mathbf{N}^*$ 上的两个零点分别为 x_{2n}， x_{2n+1}，

所以 $2n\pi<x_{2n}$；………………………………………………………………………… 11 分

又 $x_{2n-1}\in((2n-2)\pi,(2n-1)\pi),n\in\mathbf{N}^*$，所以 $x_{2n-1}<(2n-1)\pi$；

综上 $x_{2n-1}+\pi<2n\pi<x_{2n}$. ………………………………………………………… 12 分