# 重庆市第八中学 2023 届高考适应性月考卷（六）

# 数学

注意事项：

1．答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚．

2．每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．在试题卷上作答无效．

3．考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回．满分 150 分，考试用时 120 分钟．

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1．已知集合 $A=\left\{x\middle|x>-2,x\in\mathbf{R}\right\}$，$B=\left\{x\middle|x^2-x-6\geq 0,x\in\mathbf{R}\right\}$，则下列关系中，正确的是（　　）

A．$A\subseteq B$　　B．$\complement_{\mathbf{R}}A\subseteq\complement_{\mathbf{R}}B$　　C．$A\cap B=\varnothing$　　D．$\complement_{\mathbf{R}}A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=\varnothing$

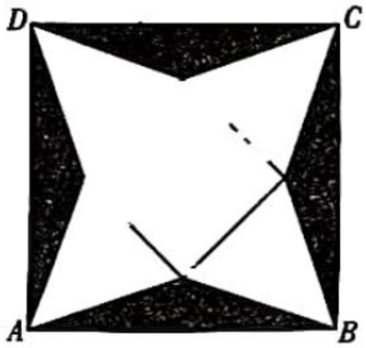
2．复数 $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}+1}$，则 $z$ 的共轭复数的虚部为（　　）

A．$-\dfrac{3}{2}$　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$-\dfrac{1}{2}$

3．斐波那契数列（Fibonacci sequence），又称黄金分割数列，因数学家莱昂纳多·斐波那契（Leonardo Fibonacci）以兔子繁殖为例子而引入，故又称为“兔子数列”，指的是这样一个数列：1、1、2、3、5、8、13、21、34、…．小利是个数学迷，她在设置手机的数字密码时，打算将斐波那契数列的前 5 个数字 1，1，2，3，5 进行某种排列得到密码．如果排列时要求两个 1 不相邻，那么小利可以设置的不同密码有（　　）

A．24 个　　B．36 个　　C．72 个　　D．60 个

4．如图，大正方形的中心与小正方形的中心重合，且大正方形边长为 $3\sqrt{2}$，小正方形边长为 2，截去图中阴影部分后，翻折得到正四棱锥 $P-EFGH$（$A$，$B$，$C$，$D$ 四点重合于点 $P$），则此四棱锥的体积为（　　）




A．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$　　C．$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　　D．$\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

5．重庆，我国四大直辖市之一，在四大直辖市中，5A 级旅游点最多，资源最为丰富，不仅有山水自然风光，还有人文历史景观．现有甲、乙两位游客慕名来到重庆旅游，分别准备从武隆喀斯特旅游区、巫山小三峡、南川金佛山、大足石刻和酉阳桃花源 5 个国家 5A 级旅游景区中随机选择其中一个景区游玩．记事件 $A$：甲和乙至少一人选择巫山小三峡，事件 $B$：甲和乙选择的景区不同，则条件概率 $P\left(B\middle|A\right)=$（　　）

A．$\dfrac{5}{6}$　　B．$\dfrac{6}{7}$　　C．$\dfrac{7}{8}$　　D．$\dfrac{8}{9}$

6．在 $\triangle ABC$ 中，$CA\perp CB$，且 $CA=CB=4$，$\overrightarrow{BN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$，动点 $M$ 在线段 $AB$ 上移动，则 $\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{BM}$ 的最小值为（　　）

A. $-\frac{9}{4}$　　B. $-\frac{9}{2}$　　C. $-1$　　D. $-3$

7．2022年诺贝尔物理学奖授予在量子领域做出贡献的法国、美国、奥地利科学家，我国于2021年成功研制出目前国际上超导量子比特数量最多的量子计算原型机“祖冲之号”，操控的超导量子比特为66个．已知1个超导量子比特共有“$|0>$，$|1>$”2种叠加态，2个超导量子比特共有“$|00>$，$|01>$，$|10>$，$|11>$”4种叠加态，3个超导量子比特共有“$|000>$，$|001>$，$|010>$，$|011>$，$|100>$，$|101>$，$|110>$，$|111>$”8种叠加态，…，只要增加1个超导量子比特，其叠加态的种数就呈指数级增长．设$M$个超导量子比特共有$N$种叠加态，且$N$是一个20位的数，则这样的$M$有（　　）个．（参考数据：$\lg 2 \approx 0.3010$）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

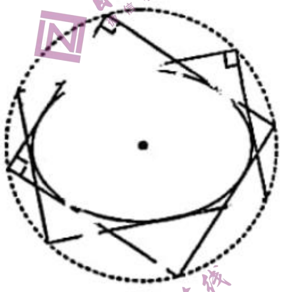
8．已知函数$f(x)=a\cdot\frac{e^{2x}}{x}-2x+\ln x\,(a\in\mathbf{R})$，若对于定义域内的任意实数$s$，总存在实数$t$使得$f(t)<f(s)$，则实数$a$的取值范围为（　　）

A. $\left(-\infty,\frac{1}{2e}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2e},+\infty\right)$　　C. $[0,+\infty)$　　D. $(-\infty,0]$

二、多项选择题（本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分）

9．加斯帕尔·蒙日（如图甲）是18~19世纪法国著名的几何学家，他在研究圆锥曲线时发现：椭圆的任意两条互相垂直的切线的交点都在同一个圆上，其圆心是椭圆的中心，这个圆被称为“蒙日圆”（图乙）．已知长方形$R$的四边均与椭圆$C:\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$相切，则下列说法正确的是（　　）


甲


乙

A．椭圆$C$的离心率为$e=\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　B．椭圆$C$的蒙日圆方程为$x^2+y^2=6$

C．椭圆$C$的蒙日圆方程为$x^2+y^2=9$　　D．长方形$R$的面积最大值为18

10．已知函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$，且$f(x)\le\left|f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right|$，$f(x)$的最小正周期为$T$，$\pi<T<2\pi$，则（　　）

A. $\omega=\frac{5}{6}$　　B. $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=1$

C. $f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$为奇函数　　D. $f(x)$关于$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$对称

11．已知$x^2(y^2+1)=1$，则（　　）

A. $xy<1$　　B. $x^2y\ge-\frac{1}{2}$　　C. $x+xy\le1$　　D. $x^2+xy\le\frac{5}{4}$

12．记$[x]$表示与实数$x$最接近的整数，数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{[\sqrt{n}]}(n\in\mathbf{N}^*)$，其前$n$项和为$T_n$．设$[\sqrt{n}]$，则下列结论正确的是（　　）

A. $\sqrt{n}=k+\frac{1}{2}$　　B. $\sqrt{n}>k-\frac{1}{2}$　　C. $n\le k^2+k$　　D. $T_{2023}=88\frac{43}{45}$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．圆 $(x-1)^2+y^2=4$ 被直线 $mx+ny-2m-n=0$ 截得的最短弦长为__________.

14．将数列 $\{2^n\}$ 与 $\{3n-2\}$ 的公共项由小到大排列得到数列 $\{a_n\}$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项的和为__________.

15．设四棱锥 $P-ABCD$ 的顶点 $P$ 和底面 $ABCD$ 的四个顶点都在半径为 2 的球面上，则该四棱锥体积的最大值为__________.

16．已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $F$，点 $P$，$Q$ 在抛物线上，且满足 $\angle PFQ=\frac{\pi}{3}$，设弦 $PQ$ 的中点 $M$ 到 $y$ 轴的距离为 $d$，则 $\frac{|PQ|}{d+1}$ 的最小值为__________.

四、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

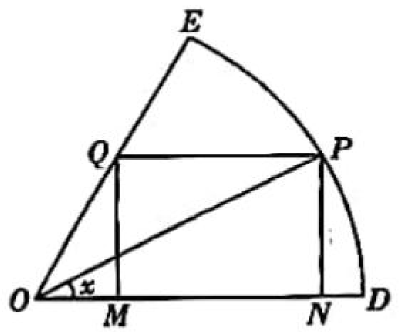
已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，且 $S_{10}=10$，$S_{20}=-180$.

（1）求 $S_n$，并求 $S_n$ 的最大值；

（2）设数列 $\{|a_n|\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$，求 $T_{30}$.

18．（本小题满分 12 分）

如图所示，已知 $DOE$ 是半径为 $\sqrt{6}$，圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的扇形，$P$ 为弧 $\overset{\frown}{DE}$ 上一动点，四边形 $PQMN$ 是矩形，$\angle POD=x\left(0<x<\frac{\pi}{3}\right)$.

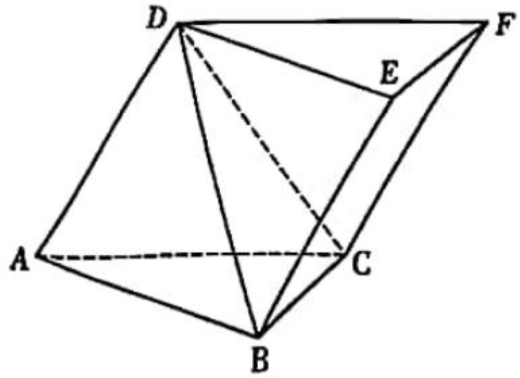



（1）求矩形 $PQMN$ 的面积 $f(x)$ 的最大值及取得最大值时的 $x$ 值；

（2）在 $\triangle ABC$ 中，$f(C)=\sqrt{3}$，$c=2$，其面积 $S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

19．（本小题满分 12 分）

如图，在斜三棱柱 $ABC-DEF$ 中，底面 $ABC$ 是边长为 2 的正三角形，$BD=CD=\frac{4}{3}\sqrt{3}$，侧棱 $AD$ 与底面 $ABC$ 所成角为 $60°$.




（1）求证：四边形 $BCFE$ 为矩形；

（2）求平面 $DBC$ 与平面 $BCFE$ 夹角的余弦值．

20.（本小题满分 12 分）

2023 年 3 月的体坛属于“冰上运动”，速滑世锦赛、短道速滑世锦赛、花滑世锦赛将在荷兰、韩国、日本相继举行．中国队的“冰上飞将”们将在北京冬奥会后再度出击，向奖牌和金牌发起冲击．据了解，甲、乙、丙三支队伍将会参加 2023 年 3 月 10 日~12 日在首尔举行的短道速滑世锦赛 5000 米短道速滑男子 5000 米接力的角逐．接力赛分为预赛、半决赛和决赛，只有预赛、半决赛都获胜才能进入决赛．已知甲队在预赛和半决赛中获胜的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{4}$；乙队在预赛和半决赛中获胜的概率分别为 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{4}{5}$；丙队在预赛和半决赛中获胜的概率分别为 $p$ 和 $\frac{3}{2}-p$，其中 $0<p<\frac{3}{4}$．

（1）甲、乙、丙三队中，谁进入决赛的可能性最大；

（2）若甲、乙、丙三队中恰有两对进入决赛的概率为 $\frac{37}{90}$，求 $p$ 的值；

（3）在（2）的条件下，设甲、乙、丙三队中进入决赛的队伍数为 $\xi$，求 $\xi$ 的分布列·

21.（本小题满分 12 分）

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的实轴长为 $2\sqrt{2}$，右焦点 $F$ 到双曲线 $C$ 的渐近线距离为 1．

（1）求双曲线 $C$ 的方程；

（2）点 $P$ 在第一象限，$P$，$Q$ 在直线 $y=\frac{1}{2}x$ 上，点 $P$，$A$，$B$ 均在双曲线 $C$ 上，且 $AQ\perp x$ 轴，$M$ 在直线 $AQ$ 上，$P$，$M$，$B$ 三点共线．从下面①②中选取一个作为条件，证明另外一个成立：①$Q$ 是 $AM$ 的中点；②直线 $AB$ 过定点 $T\left(0,1\right)$．

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\sin 2x+2\sin^2 x$．

（1）若 $f\left(x\right)\geq 2ax$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，求实数 $a$ 的取值范围；

（2）证明：$\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)+\cdots+\sin\left[\frac{\left(n+1\right)\pi}{2n+1}\right]>\frac{3\sqrt{2}}{8}$．