遵义市 2023 届高三年级第三次统一考试

参考答案（文科数学）

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	B	C	D	A	B	D	C	A	D	B

二、填空题

13. $\underline{\ 1\ }$　　14. $\underline{\sqrt{3}}$　　15. $-\dfrac{2}{3}n+1$(满足公差为 $-\dfrac{2}{3}$ 即可）　　16. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

三、解答题

17.（12 分）

解：（1）$(a+0.035+0.03+0.02+0.01)\times 10=1$，得 $a=0.005$……3 分

由图知：年龄位于 $[30,40)$ 这一组频率为 0.35，此时频率最大

所以，众数为 $\dfrac{30+40}{2}=35$……5 分

（2）由题可得，后三组 $[40,50)$，$[50,60)$，$[60,70)$ 的人数比例为 $3:2:1$

$\therefore$ 从后三组抽取的 6 人中有 3 人的年龄位于 $[40,50)$ 之间，分别记为 A_1,A_2,A_3；2 人的年龄位于 $[50,60)$ 之间，分别记为 B_1,B_2；1 人的年龄位于 $[60,70)$ 之间，记为 C_1

从 6 人中任意抽取 2 人共有 15 种不同的方法……8 分

则 2 人中至少有 1 人的年龄位于 $[50,60)$ 之间有如下情况：

A_1B_1，A_1B_2，A_2B_1，A_2B_2，A_3B_1，A_3B_2，B_1C_1,B_2C_1,B_1B_2

共有 9 种不同的情况，则 2 人中至少有 1 人的年龄位于 $[50,60)$ 之间的概率为 $P=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$．……12 分

18.（12 分）

解：（1）由题知：$S_n+n=2a_n$ ①

当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=1$……2 分

当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}+(n-1)=2a_{n-1}$ ②

①-②得到，$a_n+1=2a_n-2a_{n-1}$，化简得：$a_n=2a_{n-1}+1$……4 分

因为 $a_n+1=2(a_{n-1}+1)$

所以 $\{a_n+1\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列……6 分

（2）由（Ⅰ）知：$a_n+1=(a_1+1)2^{n-1}=2^n$……7 分

$\therefore b_n=\dfrac{2^n}{a_na_{n+1}}=\dfrac{2^n}{(2^n-1)\times(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$……9 分

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=(\dfrac{1}{2^1-1}-\dfrac{1}{2^2-1})+(\dfrac{1}{2^2-1}-\dfrac{1}{2^3-1})+\cdots+(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1})$

$=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$

……12 分

19.（12 分）

解析：（1）如图，连接 AC 交 BD 于点 O

在正方形 $ABCD$ 中，BD⊥AC…………………………………………3 分

取 $A'C'$ 中点为 O'，连接 OO'，易知 $OO' \perp$ 底面 $ABCD$

因为 $DB \subset$ 平面 $ABCD$

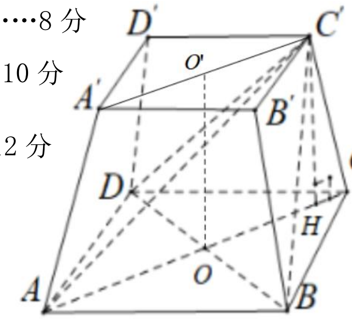
所以 $OO' \perp BC$.所以 BD 垂直于平面 ACC'

所以 $AC' \perp BD$ ……………………………………………………………………6 分

（2）如图，底面△BCD 的面积为 8…………………………………8 分

高 $C'H = \sqrt{5-2} = \sqrt{3}$ ……………………………………………10 分

所以 $V_{C'-BCD} = \dfrac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot C'H = \dfrac{1}{3} \cdot 8 \cdot \sqrt{3} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ …………………12 分



20.（12 分）

解：（1）由题知：$f(x)$ 定义域为 R

$f'(x) = 2x^2 - 2(k+1)x + 2k = (2x-2)(x-k)$

令 $f'(x) = 0, x = 1$ 或 $x = k$ ……………………………………………………………………2 分

当 $k = 1$ 时，$f'(x) \geq 0$ 在 R 上恒成立，则 $f(x)$ 在 R 上单调递增

当 $k < 1$ 时，由 $f'(x) > 0$ 解得 $x < k$ 或 $x > 1$；由 $f'(x) < 0$ 解得 $k < x < 1$

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, k), (1, +\infty)$ 上单调递增，在 $(k, 1)$ 上单调递减…………………………………4 分

当 $k > 1$ 时，由 $f'(x) > 0$ 解得 $x < 1$ 或 $x > k$；由 $f'(x) < 0$ 解得 $1 < x < k$

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1), (k, +\infty)$ 上单调递增，在 $(1, k)$ 上单调递减……………………………………6 分

（2）由题知：$f(x) = g(x)$ 有三个实数根，即是 $f(x) - g(x) = 0$ 有三个实数根

令 $h(x) = f(x) - g(x)$，则

$h(x) = f(x) - g(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - (k+1)x^2 + 2kx - (2kx+1)$

$= \dfrac{2}{3}x^3 - (k+1)x^2 - 1$

$h'(x) = 2x^2 - 2(k+1)x = 2x[x-(k+1)]$

令 $h'(x) = 0, x = 0$ 或 $x = k+1$ ……………………………………………………………7 分

当 $k = -1$ 时，$k+1 = 0$，$h'(x) \geq 0$ 在 R 上恒成立，则 $h(x)$ 在 R 上单调递增，至多有一个实数根，不满足条件

当 $k > -1$ 时，$k+1 > 0$，由 $h'(x) > 0$ 解得 $x < 0$ 或 $x > k+1$；由 $h'(x) < 0$ 解得 $0 < x < k+1$

则 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0), (k+1, +\infty)$ 上单调递增，在 $(0, k+1)$ 上单调递减

极大值 $h(0) = -1 < 0$

因为 $h(x) = f(x) - g(x)$ 有三个实数根

此时至多有一个实数根显然此时不满足条件…………………………………………………9 分

当 $k < -1$ 时，$k+1 < 0$，由 $h'(x) > 0$ 解得 $x > 0$ 或 $x < k+1$；由 $h'(x) < 0$ 解得 $k+1 < x < 0$

则 $h(x)$ 在 $(-\infty, k+1), (0, +\infty)$ 上单调递增，在 $(k+1, 0)$ 上单调递减

$h(0) = -1 < 0$，$x \to +\infty, h(x) > 0$

因为 $h(x) = f(x) - g(x)$ 有三个实数根

$\begin{cases} h(0) < 0 \\ h(k+1) > 0 \end{cases}$，即是 $\begin{cases} -1 < 0 \\ \dfrac{2}{3}(k+1)^3 - (k+1)(k+1)^2 - 1 > 0 \end{cases}$，解得 $k < -1 + \sqrt[3]{-3} = -1 - \sqrt[3]{3}$

综上所述，$f(x) = g(x)$ 有三个实数根时 $k \in (-\infty, -1-\sqrt[3]{3})$ ……………………………12 分

21.（12 分）

解：（1）由题可知有 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1$，$a^2-b^2=c^2$ 联立解得 $a=2,b=\sqrt{3},c=1$

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ……………………………………………………5 分

（2）由直线 l 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$，可设直线 l 的方程为 $x=2y+t$，

联立椭圆方程消去 x 可得

$$16y^2+12ty+3t^2-12=0$$

设 P,Q 的坐标为 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

则 $y_1+y_2=-\dfrac{3t}{4}$，$y_1y_2=\dfrac{3t^2-12}{16}$ ① ……………………………………………………7 分

所以 $x_1+x_2=2(y_1+y_2)+2t=\dfrac{t}{2}$，

所以 $k_{AP}+k_{AQ}=\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\dfrac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}=\dfrac{(y_1-\frac{3}{2})(x_2-1)+(y_2-\frac{3}{2})(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$ ……………………9 分

展开整理得 $k_{AP}+k_{AQ}=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1-\frac{3}{2}(x_1+x_2)-(y_1+y_2)+3}{(x_1-1)(x_2-1)}$，

$x_1y_2+x_2y_1=(2y_1+t)y_2+(2y_2+t)y_1=-3$ ②

将①②代入可得

$k_{AP}+k_{AQ}=0$，从而 $\angle AMN=\angle ANM$，因此 $|AM|=|AN|$ ……………………………………12 分

22.（10 分）

解：（1）由题得 $\begin{cases} x-2=\dfrac{1}{2}t \\ y-\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$

所以直线 l 的直角坐标方程为 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$ ……………………………………………………2 分

$\because$ 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=6\cos\theta$

$\therefore \rho^2=6\rho\cos\theta$，由 $\begin{cases} \rho^2=x^2+y^2 \\ x=\rho\cos\theta \end{cases}$ 得：

曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2-6x=0$ ……………………………………………………………5 分

（2）由点 $P(1,0)$ 可知点 P 在直线 l 上

则直线 l 的参数方程可写为：$\begin{cases} x=1+\dfrac{1}{2}t' \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t' \end{cases}$（$t'$ 为参数）……………………………………6 分

将直线参数方程带入曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2-6x=0$ 得：

$t'^2-2t'-5=0$

不妨假设 A,B 两点对应的参数分别为 t_1',t_2'，则：

$t_1'+t_2'=2$，$t_1't_2'=-5$ ……………………………………………………………………………8 分

$\therefore |PA|+|PB|=|t_1'|+|t_2'|=\sqrt{(t_1'+t_2')^2-4t_1't_2'}=2\sqrt{6}$ ……………………………………10 分

23.（10 分）

解：（1）由题意：

①当 $x<1$ 时，$f(x)=-2x+3$，则：$-2x+3\le 5$，解得 $x\ge -1$

此时 $-1\le x<1$

②当 $1\le x\le 2$ 时，$f(x)=1$，则：$f(x)\le 5$ 恒成立

此时 $1\le x\le 2$

③当 $x>2$ 时，$f(x)=2x-3$，则：$2x-3\le 5$，解得 $x\le 4$

此时 $2<x\le 4$

综上所述，不等式 $f(x)\le 5$ 的解集为 $[-1,4]$…………………………………………………………5 分

（2）由绝对值三角不等式得 $f(x)=|x-1|+|x-2|\ge|(x-1)-(x-2)|=1$…………………………7 分

（当且仅当 $(x-1)(x-2)\le 0$ 时等号成立）

因为函数 $f(x)$ 的最小值为 t

$\therefore t=1\Rightarrow a+b+c=1$

由柯西不等式得：

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})(a+b+c)\ge(1+1+1)^2=9$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 9$，当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时，“=”成立…………………………………………10 分