



## 巴蜀中学 2024 届高三适应性月考卷 (二)

### 数学参考答案

一、单项选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分)

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 答案 | C | A | B | D | B | D | C | B |

【解析】

1.  $A \cap B = \left\{ (x, y) \left| \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \right. \right\} = \{(1, 2)\}$ , 故选 C.

2.  $\sin \alpha = \frac{t}{\sqrt{3+t^2}} = \frac{2}{t} \Rightarrow t^2 = 2\sqrt{3+t^2}$ , 解得:  $t = \pm\sqrt{6}$ , 所以  $\tan \alpha = \frac{\pm\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \pm\sqrt{2}$ , 故选 A.

3.  $\bar{x} = 5, \bar{y} = \frac{33+m}{4} = -1.4 \times 5 + 17.5 = 10.5 \Rightarrow m = 9$ , 故选 B.

4. 化简为  $\sqrt{\frac{1+\cos 20^\circ}{2}} + \sqrt{1-\sin 20^\circ} = \cos 10^\circ + \cos 10^\circ - \sin 10^\circ = 2\cos 10^\circ - \sin 10^\circ$ , 故选 D.

5.  $a_2 + a_1 = 2^1, a_4 + a_3 = 2^3, a_6 + a_5 = 2^5, a_8 + a_7 = 2^7, a_{10} + a_9 = 2^9$ , 所以  $S_{10} = 2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9 = \frac{2 \times (1-4^5)}{1-4} = 682$ , 故选 B.

6. 令  $x=y=0$ , 则  $f(0)+f(0)=2f(0) \cdot f(0)$ ,  $\because f(0) \neq 0, \therefore f(0)=1$ , 再令  $x=0$ , 则  $f(0+y)+f(0-y)=2f(0) \cdot f(y) \Rightarrow f(-y)=f(y)$ ,  $\therefore f(x)$  为偶函数, A 正确; 又令  $y=1$ , 则  $f(x+1)+f(x-1)=2f(x) \cdot f(1)=0 \Rightarrow f(x+1)=-f(x-1) \Rightarrow f(x+2)=-f(x) \Rightarrow f(x+4)=f(x)$ ,  $\therefore f(x)$  为周期是 4 的周期函数, B 正确;  $f(2024)=f(0)=1$ , C 正确; 若 D 正确, 则  $f(x+4)+f(-x)=0$ , 又  $f(x)$  为周期是 4 的周期函数,  $\therefore f(x)=-f(-x)$ ,  $f(x)$  为奇函数, 则  $f(0)=0$  与已知中 “ $f(0) \neq 0$ ” 矛盾, D 错误, 故选 D.

7. 设  $|\overline{FB}|=t$ , 则  $|\overline{AF}|=3t$ , 如图 1 所示, 不妨设  $AB$  的倾斜角为锐角, 过  $A, B$  分别作抛物线准线的垂线, 垂足分别为  $A_1, B_1$ , 则  $AA_1=3t, BB_1=t$ , 过  $B$  作  $BD \perp AA_1$  于  $D$ , 则  $AD=2t, \therefore \cos \angle BAD = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$ ,  $\therefore l$  的倾斜角为  $60^\circ$ , 由结论有:

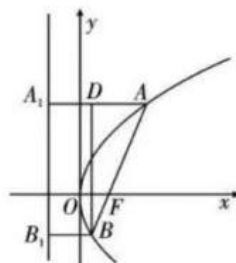


图 1



$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{p^2}{2\sin\theta} = \frac{3}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}, \text{ 当 } AB \text{ 倾斜角为钝角时, 一样推导出 } C \text{ 成立, 故选 } C.$$

8. 显然  $b = \frac{1}{60} = \frac{0.02}{1+10 \times 0.02}$ , 设  $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+10x}$  ( $0 < x < 1$ ), 则  $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+10x)^2} > 0$  ( $0 < x < 1$ ), 所以  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增,  $\therefore f(0.02) > f(0) = 0 \Rightarrow a = \ln 1.02 > \frac{1}{60} = b$ . 设  $p(x) = \ln(1+x) - \sin x$ ,  $x \in (0, 1)$ , 则  $p'(x) = \frac{1}{(x+1)} - \cos x$ . 又设  $q(x) = p'(x) = \frac{1}{(x+1)} - \cos x$ ,  $q'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \sin x$  在  $x \in (0, 1)$  上单调递增,  $\because q'(0) = -1 < 0, q'(1) = -\frac{1}{4} + \sin 1 > 0, \therefore \exists t \in (0, 1)$ , 使  $q'(t) = 0$ , 所以  $q(x)$  在  $(0, t)$  上单调递减, 在  $(t, 1)$  上单调递增. 因为  $q(0) = 0, q(1) = \frac{1}{2} - \cos 1 < 0$ , 所以  $q(x) < 0$  在  $(0, 1)$  上恒成立, 所以  $p(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 所以  $p(x) < p(0) = 0$ , 所以  $p(0.02) < 0$ , 即  $\ln 1.02 < \sin 0.02$ , 所以  $a < c$ , 故  $c > a > b$ , 故选 B.

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项是符合题目要求的, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

|    |     |     |    |    |
|----|-----|-----|----|----|
| 题号 | 9   | 10  | 11 | 12 |
| 答案 | ACD | ACD | BC | AC |

【解析】

9. 通项公式为  $T_{r+1} = C_{10}^r (2x)^{10-r} (-1)^r = (-1)^r 2^{10-r} C_{10}^r x^{10-r}$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots, 10$ , 其二项式系数为  $C_{10}^r$ , 故第 6 项的二项式系数  $C_{10}^5$  是最大的, 二项式系数和为  $2^{10}$ , 所以 A, C 正确; 令  $x=1$  得所有项的系数和为 1, 故 D 正确; 因为展开式中第六项的系数为负数, 所以第六项的系数不可能为最大, 故 B 选项错误, 故选 ACD.
10.  $f'(x) = [x^2 + (2+m)x + m] \cdot e^x$ , 设  $g(x) = x^2 + (2+m)x + m$ ,  $g(-1) = 1 - 2 - m + m = -1 < 0$ ,  $\therefore g(x) = 0$  一定有两根  $x_1, x_2$ , 设  $x_1 < x_2$ , 则  $x_1 < -1 < x_2$ ,  $\therefore f(x)$  的极大值点  $x_1$  为负, A 正确;  $\because g(0) = m$  可正可负,  $\therefore f(x)$  的极小值点  $x_2$  可正可负, B 错误;  $f(x)$  在  $(-\infty, x_1) \uparrow, (x_1, x_2) \downarrow, (x_2, +\infty) \uparrow$ , 且  $f(0) = 0$ ,  $\therefore f(x)$  极小值  $= f(x_2) < f(0) = 0$ , D 正确;  $\because x \rightarrow -\infty$  时,  $f(x) \rightarrow 0^+$ ,  $\therefore x < x_1$  时,  $f(x) > 0$  恒成立,  $\therefore f(x)$  极大值  $= f(x_1) > 0$ , C 正确, 故选 ACD.



11.  $0 < \alpha < \pi \Rightarrow 0 < 2\alpha < 2\pi$ , 又  $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5} < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2\alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ ,  $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$   
 $\Rightarrow \tan \alpha = \pm 2$ , 若  $\tan \alpha = 2$ , 则  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , 又  $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{5\pi}{4} < \alpha + \beta < 2\pi$ , 而  
 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{2}}{10} < 0$ ,  $\therefore \frac{5\pi}{4} < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$ , 这样  $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$ ,  $\tan(\alpha + \beta) = 7 \Rightarrow$   
 $\tan \beta = \frac{1}{3}$ , 符合  $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ . 若  $\tan \alpha = -2$ , 则  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ , 又  $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \alpha +$   
 $\beta < \frac{9\pi}{4}$ , 而  $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{2}}{10} < 0$  矛盾,  $\therefore$  舍去, 这样 A 错误, B 正确;  
 $\tan(\beta - \alpha) = -1$ ,  $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < -\alpha < -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \beta - \alpha < \frac{5\pi}{4}$ ,  $\therefore \beta - \alpha = \frac{3\pi}{4}$ , C 正确;  
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = -\frac{\sqrt{2}}{10}$ ,  $\cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  
 解得  $\cos \alpha \cos \beta = -\frac{3\sqrt{2}}{10}$ , D 错误, 故选 BC.

12. A 选项中,  $a^b < a^a < b^a$ , 所以正确; B 选项中, 由于  $a + b - ab - 1 = (a-1)(1-b) < 0$ , 而已  
 知  $0 < a < b < 1$ , 所以 B 不正确; C 选项中,  $a^{1-b} < b^{1-a} \Leftrightarrow (1-b)\ln a$   
 $< (1-a)\ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{1-a} < \frac{\ln b}{1-b}$ , 设  $f(x) = \frac{\ln x}{1-x} (0 < x < 1)$ , 则  $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} - 1 + \ln x}{(1-x)^2} (0 < x < 1)$ , 设  
 $g(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1 (0 < x < 1)$ , 则  $g'(x) = \frac{x-1}{x^2} < 0 \Rightarrow g(x) > g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  
 $(0, 1)$  上递增, 这样  $f(a) < f(b)$ , 故 C 正确; D 选项中, 取  $a = \frac{1}{9}$ ,  $b = \frac{1}{3}$ , 则  
 $\log_a(1+b) = \log_{\frac{1}{9}} \frac{4}{3} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $\log_b(1+a) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{10}{9}$ , 又  $\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{9} > \frac{10}{9} > 1$ , 故  
 $\log_a(1+b) = \log_{\frac{1}{9}} \frac{4}{3} < \log_b(1+a) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{10}{9}$ , 所以 D 错误, 故选 AC.

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

|    |                |               |            |                                       |
|----|----------------|---------------|------------|---------------------------------------|
| 题号 | 13             | 14            | 15         | 16                                    |
| 答案 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\sqrt{5}$ | $\left[\frac{\ln 2}{4} + 1, 2\right)$ |



【解析】

13.  $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x, f'(x) = \frac{1}{2} \cos 2x \cdot 2, f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$

14.  $f(-1) = f(1) \Rightarrow -a - \log_2 \frac{9}{8} = a - \log_2 9 \Rightarrow a = \frac{3}{2}.$  当  $a = \frac{3}{2}$  时,  $f(x) = \frac{3}{2}x - \log_2(8^x + 1) = -\log_2(8^{\frac{x}{2}} + 8^{-\frac{x}{2}})$  为偶函数, 符合.

15. 设点  $P(x, y)$ , 则  $\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2, \\ b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| = \frac{a\sqrt{b^2+c^2}}{c}, \\ |y| = \frac{b^2}{c}, \end{cases} \therefore \frac{b}{a} = \frac{\frac{b^2}{c}}{c - \frac{a\sqrt{b^2+c^2}}{c}} \Rightarrow$

$c^2 - ab = a\sqrt{b^2+c^2} \Rightarrow b = 2a, \therefore$  双曲线  $C$  的离心率为  $\sqrt{5}.$

16. 显然  $m \leq 0$  不符合题意, 所以只能  $m > 0$ , 这样由于  $x > 0$ , 所以

$\frac{\ln x}{x} > mx - 2$ , 令  $g(x) = \frac{\ln x}{x}, h(x) = mx - 2$ , 其定义域为  $(0, +\infty)$ ,

则  $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ , 令  $g'(x) = 0$ , 即  $1 - \ln x = 0$ , 解得  $x = e$ , 当

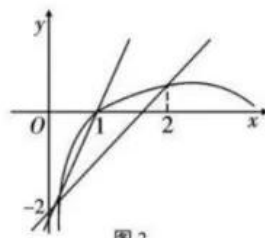


图2

$x \in (0, e)$  时,  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  单调递增; 当  $x \in (e, +\infty)$  时,  $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$  单调递减,

所以  $g(x)$  在  $x = e$  处取极大值也是最大值. 又由  $g(e) = \frac{1}{e}, g(1) = 0$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时,

$g(x) > 0$ , 如图 2, 画出函数  $g(x)$  的大致图象, 又由函数  $h(x)$  的图象是恒过点  $(0, -2)$  的

直线, 所以作出函数  $g(x) = \frac{\ln x}{x}$  和  $h(x) = mx - 2$  的大致图象 (如图), 过点  $(0, -2)$  的直线

$y = mx - 2$  介于  $(1, 0), (2, g(2))$  之间时满足条件, 直线  $y = mx - 2$  过点  $(1, 0)$  时,  $m$  的值

为 2; 该直线过点  $(2, g(2))$  时,  $m$  的值为  $\frac{\ln 2}{4} + 1$ , 由图知  $m$  的取值范围是  $\left[\frac{\ln 2}{4} + 1, 2\right).$

四、解答题 (共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

解: (1)  $f'(x) = \cos x + a,$

由题:  $f'(0) = 1 + a = 2$ , 故  $a = 1.$  ..... (4 分)

(2)  $\because f'(x) = \cos x + 1 \geq 0, \therefore f(x)$  在  $[0, 2\pi]$  上  $\uparrow$ ,

故最小值为  $f(0) = 0$ , 最大值为  $f(2\pi) = 2\pi.$  ..... (10 分)



18. (本小题满分 12 分)

解: (1) 设  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ ,  $\{b_n\}$  的公差为  $d$ ,

$$\text{由题: } 2 + 2q + 2q^2 = 2 \cdot q^3 - 2 \Rightarrow (q-2) \cdot (q^2 + q + 1) = 0,$$

$$\because q^2 + q + 1 \neq 0, \therefore q = 2, \text{ 故 } a_n = 2^n.$$

$$\text{又 } R_3 = a_3 - 2, \text{ 即 } 1 + (1+d) + (1+2d) = 6 \Rightarrow d = 1, \text{ 故: } b_n = n.$$

..... (6 分)

$$(2) \because c_n = \frac{n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - \frac{2^n}{n+1},$$

$$\therefore c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n = \left(\frac{2^2}{3} - \frac{2^1}{2}\right) + \left(\frac{2^3}{4} - \frac{2^2}{3}\right) + \left(\frac{2^4}{5} - \frac{2^3}{4}\right) + \dots + \left(\frac{2^{n+1}}{n+2} - \frac{2^n}{n+1}\right) = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1.$$

..... (12 分)

19. (本小题满分 12 分)

(1) 证明: 如图 3, 连接  $AC$  交  $BG$  于点  $O$ , 连接  $CG$ ,  $ABCG$  为平行四边形, 则  $O$  为  $AC$  的中点,

连接  $OF$ , 则  $OF \parallel \frac{1}{2}AP$ .

又  $OF \subset$  平面  $BFG$ , 故  $AP \parallel$  平面  $BFG$ .

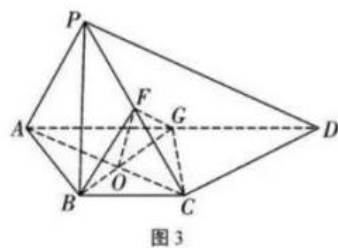


图 3

..... (5 分)

(2) 解: 如图 4, 取  $AG$  的中点  $H$ , 连接  $PH, BH$ ,

则  $BH \perp AG, PH \perp AG$ .

又平面  $ADP \perp$  平面  $ABCD$ , 且平面  $ADP \cap$  平面  $ABCD = AD$ ,

故  $PH \perp$  平面  $ABCD$ .

以  $\overline{HB}, \overline{HD}, \overline{HP}$  分别为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴建立空间直角坐标系, 如图所示.

设  $AB = 2$ , 则平面  $ABCD$  的法向量为  $\vec{n} = (0, 0, 1)$ ,

$$B(\sqrt{3}, 0, 0), A(0, -1, 0), P(0, 0, \sqrt{3}), G(0, 1, 0),$$

设平面  $BFG$  的法向量为  $\vec{m} = (x, y, z)$ ,

$$\because \overline{BG} = (-\sqrt{3}, 1, 0), \overline{OF} = \frac{1}{2}\overline{AP} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\therefore \begin{cases} -\sqrt{3}x + y = 0, \\ \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot z}{2} = 0, \end{cases} \text{ 取 } z = 1, \vec{m} = (-1, -\sqrt{3}, 1),$$

$$\therefore \text{所求值为 } \cos \theta = |\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle| = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}. \text{ ..... (12 分)}$$

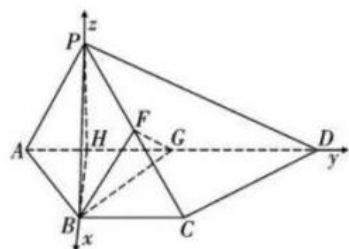


图 4



20. (本小题满分 12 分)

解: (1) 零假设  $H_0$ : 假设跳水员的优秀情况与训练无关.

列联表为

|     | 优秀人数 | 非优秀人数 | 合计 |
|-----|------|-------|----|
| 训练前 | 2    | 8     | 10 |
| 训练后 | 8    | 2     | 10 |
| 合计  | 10   | 10    | 20 |

$$\chi^2 = \frac{20 \times (4 - 64)^2}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = \frac{36}{5} = 7.2 > 6.635,$$

故根据小概率值  $\alpha = 0.01$  的独立性检验, 零假设不成立, 即跳水员的优秀情况与训练有关, 此推断犯错误的概率不超过 0.01. .... (4 分)

(2) 由图可知: 训练前后均不优秀的有  $C, F$  共 2 人, 训练前后均优秀的有  $D, G$  共 2 人, 训练前不优秀而训练后优秀的有 6 人,

设  $A =$  “所选 3 人中恰有 2 人训练后为优秀”,  $B =$  “所选 3 人中恰有 1 人训练前为优秀”,

$$\text{则 } P(A \cdot B) = \frac{C_2^1 \cdot C_6^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^3}, P(A) = \frac{C_8^2 \cdot C_2^1}{C_{10}^3},$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{C_2^1 \cdot C_6^1 \cdot C_2^1}{C_8^2 \cdot C_2^1} = \frac{3}{7}. \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

(3) 设跳水员  $A$  每轮测试为优秀的概率为  $P$ ,

$$\text{则 } P = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{27}.$$

设  $A$  测试次数为  $n$ , 则优秀的次数  $X \sim B(n, p)$ ,

$$\text{故 } E(X) = \frac{7n}{27} \geq 3 \Rightarrow n \geq \frac{81}{7} \approx 11.6,$$

故至少需进行 12 轮测试. .... (12 分)

21. (本小题满分 12 分)

(1) 解: 由题:  $OF = 4 \Rightarrow OA = 2, OF_1 = 1,$

$$\therefore a = 2, c = 1, b^2 = 3,$$

$$\therefore \text{椭圆 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$



(2) 证明: 由 (1) 可知:  $F_1(-1, 0)$ ,  $A(2, 0)$ ,

设  $B(x_1, y_1)$ ,  $D(x_2, y_2)$ ,  $M(-4, y_M)$ ,  $N(-4, y_N)$ ,

显然直线  $l$  的斜率不为 0, 故可设为  $x = ty - 1$ .

$$\text{由 } \begin{cases} x = ty - 1, \\ 3x^2 + 4y^2 = 12, \end{cases} \text{ 得: } (3t^2 + 4) \cdot y^2 - 6t \cdot y - 9 = 0,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{6t}{3t^2 + 4}, \quad y_1 \cdot y_2 = \frac{-9}{3t^2 + 4}.$$

$$\because A, B, M \text{ 三点共线}, \therefore \frac{y_M}{-6} = \frac{y_1}{x_1 - 2} = \frac{y_1}{ty_1 - 3} \Rightarrow y_M = \frac{-6y_1}{ty_1 - 3}.$$

$$\text{同理: } y_N = \frac{-6y_2}{ty_2 - 3}.$$

$$\therefore y_M \cdot y_N = \frac{36 \cdot y_1 \cdot y_2}{t^2 \cdot y_1 \cdot y_2 - 3t(y_1 + y_2) + 9} = \frac{\frac{-9 \times 36}{3t^2 + 4}}{\frac{-9t^2}{3t^2 + 4} - 3t \times \frac{6t}{3t^2 + 4} + 9} = \frac{-9 \times 36}{-9t^2 - 18t^2 + 27t^2 + 36}$$

$= -9$ , 故  $\overline{F_1M} \cdot \overline{F_1N} = 9 + y_M \cdot y_N = 0$ , 即:  $\angle MF_1N = 90^\circ$ . ..... (12 分)

22. (本小题满分 12 分)

(1) 解: 由题意知, 方程  $f(x) = 0$  在  $(0, +\infty)$  上有两个不同根,

即方程  $\ln x - ax = 0$  在  $(0, +\infty)$  上有两个不同根,

即方程  $a = \frac{\ln x}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上有两个不同根.

$$\text{令 } g(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x \in (0, +\infty), \text{ 则 } g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

则当  $0 < x < e$  时,  $g'(x) > 0$ ,  $x > e$  时,  $g'(x) < 0$ ,

则函数  $g(x) = \frac{\ln x}{x}$  在  $(0, e)$  上单调递增, 在  $(e, +\infty)$  上单调递减,

$$\text{所以 } g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e}.$$

又因为  $g(1) = 0$ , 当  $x > 1$  时,  $g(x) > 0$ , 当  $0 < x < 1$  时,  $g(x) < 0$ ,

所以  $a$  的取值范围为  $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ . ..... (5 分)

(2) 证明: 即证  $e^{1+\lambda} < x_1 \cdot x_2^\lambda$ , 两边取对数, 等价于要证  $1 + \lambda < \ln x_1 + \lambda \ln x_2$ ,

由 (1) 可知  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$  分别是方程  $\ln x - 2ax = 0$  的两个根,

$$\text{即 } \ln x_1 = 2ax_1, \quad \ln x_2 = 2ax_2,$$



所以原式等价于  $1 + \lambda < 2ax_1 + 2\lambda ax_2 = 2a(x_1 + \lambda x_2)$ .

因为  $\lambda > 0$ ,  $0 < x_1 < x_2$ ,

所以原式等价于要证明  $2a > \frac{1 + \lambda}{x_1 + \lambda x_2}$ .

又由  $\ln x_1 = 2ax_1$ ,  $\ln x_2 = 2ax_2$  作差得,  $\ln \frac{x_1}{x_2} = 2a(x_1 - x_2)$ , 即  $2a = \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2}$ ,

所以原式等价于  $\frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} > \frac{1 + \lambda}{x_1 + \lambda x_2}$ , 令  $t = \frac{x_1}{x_2}$ ,  $t \in (0, 1)$ ,

则不等式  $\ln t < \frac{(1 + \lambda)(t - 1)}{t + \lambda}$  在  $t \in (0, 1)$  上恒成立.

令  $h(t) = \ln t - \frac{(1 + \lambda)(t - 1)}{t + \lambda}$ ,  $t \in (0, 1)$ ,

又  $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{(1 + \lambda)^2}{(t + \lambda)^2} = \frac{(t - 1)(t - \lambda^2)}{t(t + \lambda)^2}$ ,

当  $\lambda \geq 1$  时,  $t \in (0, 1)$  时,  $h'(t) > 0$ ,

所以  $h(t)$  在  $t \in (0, 1)$  上单调递增.

又  $h(1) = 0$ ,  $h(t) < 0$ ,

所以  $\ln \frac{x_1}{x_2} < \frac{(1 + \lambda)(x_1 - x_2)}{x_1 + \lambda x_2}$  在  $t \in (0, 1)$  恒成立, 所以原不等式恒成立.

..... (12 分)



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 ([网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。



如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

自主选拔在线  
zizzsw

自主选拔在线  
微信号：zizzsw

自主选拔在线  
微信号：zizzsw

自主选拔在线  
微信号：zizzsw

自主选拔在线  
微信号：zizzsw