

2023 年高三拔尖强基定时期中质检

数学试题

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 已知集合 $A = \{x | y = \lg(x+3)\}$, $B = \{x | x \geq 2\}$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $-3 \in A$ B. $3 \notin B$ C. $A \cap B = B$ D. $A \cup B = B$

2. 如果复数 $(m^2 - 3m) + (m^2 - 5m + 6)i$ 是纯虚数, 则实数 m 的值为 ()

- A. 0 B. 2 C. 0 或 3 D. 2 或 3

3. 若函数 $f(x)$ 同时满足: (1) 对于定义域内的任意 x , 有 $f(x) + f(-x) = 0$; (2) 对于定义域内的任意 x_1, x_2 , 当 $x_1 \neq x_2$

时, 有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 则称函数 $f(x)$ 为“理想函数”. 给出下列四个函数: ① $f(x) = x^2$; ② $f(x) = -x^3$; ③

$$f(x) = x - \frac{1}{x}; \quad ④ f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}.$$

其中是“理想函数”的序号是 ()

- A. ①② B. ②③ C. ②④ D. ③④

4. 已知函数 $f(x)$ 为偶函数, 定义域为 $\mathbb{R}$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, 则不等式 $f(x^2 - x) - f(x) > 0$ 的解集为 ()

- A. $(0, 1)$ B. $(0, 2)$
C. $(-1, 1)$ D. $(-2, 2)$

5. 石碾子是我国传统粮食加工工具. 如图是石碾子的实物图, 石碾子主要由碾盘、碾滚(圆柱形)和碾架组成. 碾盘中心设竖轴(碾柱), 连碾架, 架中装碾滚, 以人推或畜拉的方式, 通过碾滚在碾盘上的滚动达到碾轧加工粮食作物的目的. 若推动拉杆绕碾盘转动 2 周, 碾滚的外边缘恰好滚动了 5 圈, 碾滚与碾柱间的距离忽略不计, 则该圆柱形碾滚的高与其底面圆的直径之比约为 ()



- A. 3 : 2 B. 5 : 4 C. 5 : 3 D. 4 : 3

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 \neq 0$, 而 $a_9 = 0$, 则 $\frac{a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16}}{a_7 + a_8 + a_{14}} =$ ()

- A. 0 B. 2 C. -1 D. $\frac{1}{2}$

7. 已知 $a = 0.5^{0.6}$, $b = 0.6^{0.5}$, $c = \log_6 5$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$
C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

8. 四面体 $ABCD$ 的各个顶点都在球 O 的表面上, BA, BC, BD 两两垂直, 且 $AB = \sqrt{11}, BC = 3, BD = 4, E$ 是线段 BC 上一点, 且 $BE = 2EC$, 过 E 作四面体 $ABCD$ 外接球 O 的截面, 则所得截面圆的面积的最大值与最小值之差

是 ()

- A. 7π B. 9π C. 5π D. 8π

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，则下列结论中正确的是 ()

A. π 为函数 $|f(x)|$ 的一个周期

B. $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一个对称中心

C. 若函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 上单调递增，则实数 a 的最大值为 $\frac{5\pi}{12}$

D. 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后，得到一个偶函数的图象

10. 已知 O 为坐标原点，抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，准线为 l ，过点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点，下列说法正确的有 ()

A. 线段 AB 长度的最小值为 4

B. 过点 $M(0, 1)$ 与抛物线只有一个交点的直线有两条

C. 直线 OA 交抛物线的准线于点 D ，则直线 DB 平行 x 轴

D. $\triangle AOB$ 可能为直角三角形

11. 已知 $A(4, 2)$ ， $B(0, 4)$ ，圆 $C: (x-4)^2 + (y-1)^2 = 4$ ， P 为圆 C 上的动点，下列结论正确的是 ()

A. $|PB| - |PA|$ 的最大值为 $2\sqrt{5}$

B. $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为 -4

C. $x+y$ 的最小值为 $5-2\sqrt{2}$

D. $\angle PBA$ 最大时， $|PB| = 2\sqrt{5}$

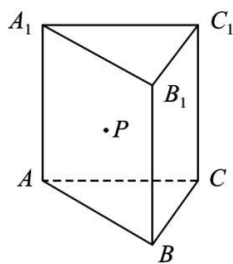
12. 已知 $\frac{a}{\ln a} = \frac{b}{\ln b} = 2.86, c \ln c = d \ln d = -0.35, a < b, c < d$ ，则有 ()

A. $a+b < 2e$ B. $c+d > \frac{2}{e}$

C. $ad < 1$ D. $bc > 1$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $AC = 2$ ，侧棱长为 $\sqrt{3}$ ，点 P 是侧面 ACC_1A_1 内一点。当 $|AB| + |BC|$ 最大时，过 B, B_1, P 三点的截面面积的最小值为_____。



14. 若函数 $y = \frac{1}{2} \sin \omega x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递减, 则 ω 的取值范围是_____.

15. 已知直线 $l: y = kx + b$ 是函数 $f(x) = ax^2 (a > 0)$ 与函数 $g(x) = e^x$ 的公切线, 若 $(1, f(1))$ 是直线 l 与函数 $f(x)$ 相切的切点, 则 $b =$ _____.

16. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a = 4, c = 3b$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是_____;
若 r, R 分别为 $\triangle ABC$ 的内切圆和外接圆半径, 则 rR 的取值范围为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $\frac{2}{3} S_n = a_n - \frac{2}{3} n - 2$.

(1) 求证: 数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列;

(2) 若 $b_n = \frac{1}{a_n + 2}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < \frac{1}{6}$.

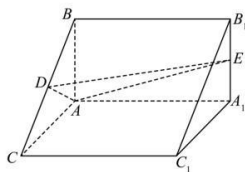
18. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且向量 $\vec{m} = (2b - a, c)$ 与向量 $\vec{n} = (\cos A, \cos C)$ 共线.

(1) 求 C ;

(2) 若 $c = \sqrt{3}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $a + b$ 的值.



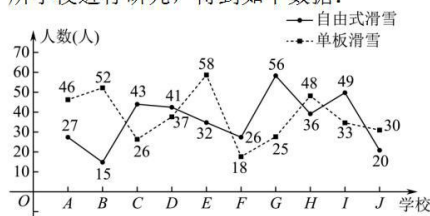
19. (12分) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 ABB_1A_1 为矩形, 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 , $AB=2, AA_1=4, D, E$ 分别是 BC, A_1B_1 的中点.



(1) 求证: $DE \parallel$ 平面 ACC_1A_1 ;

(2) 若侧面 ACC_1A_1 是正方形, 求直线 A_1C_1 与平面 ADE 所成角的正弦值.

20. (12分) 北京冬奥会的举办使得人们对冰雪运动的关注度和参与度持续提高. 某地很多中小学开展了模拟冬奥会赛事的活动, 为了深入了解学生在“自由式滑雪”和“单板滑雪”两项活动的参与情况, 在该地随机选取了 10 所学校进行研究, 得到如下数据:



(1) 从这 10 所学校中随机抽取 2 所, 在抽取的 2 所学校参与“单板滑雪”的人数超过 30 人的条件下, 求这 2 所学校参与“自由式滑雪”的人数超过 30 人的概率;

(2) “自由式滑雪”参与人数超过 40 人的学校可以作为“基地学校”, 现在从这 10 所学校中随机抽取 3 所, 记 X 为选出“基地学校”的个数, 求 X 的分布列和数学期望;

(3) 现在有一个“单板滑雪”集训营, 对“滑行、转弯、停止”这 3 个动作技巧进行集训, 且在集训中进行了多轮测试. 规定: 在一轮测试中, 这 3 个动作至少有 2 个动作达到“优秀”, 则该轮测试记为“优秀”. 已知在一轮集训测试的 3 个动作中, 甲同学每个动作达到“优秀”的概率均为 $\frac{2}{3}$, 每个动作互不影响且每轮测试互不影响. 如果甲同学在集训测试中获得“优秀”次数的平均值不低于 8 次, 那么至少要进行多少轮测试?

21. (12分) 已知点 $F(0, 1)$ 和直线 $l_1: y=-1$, 直线 l_2 过直线 l_1 上的动点 M 且与直线 l_1 垂直, 线段 MF 的垂直平分线 l 与直线 l_2 相交于点 P .

(1) 求点 P 轨迹 C 的方程;

(2) 过点 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点. 若 C 上恰好存在三个点 $D_i (i=1, 2, 3)$, 使得 $\triangle ABD_i$ 的面积等于 $\frac{27}{4}$, 求 l 的方程.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = a(e^x - x - 1) - \ln(x+1) + x, a \geq 0$.

(1) 证明: $f(x)$ 存在唯一零点;

(2) 设 $g(x) = ae^x + x$, 若存在 $x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$, 使得 $f(x_1) = g(x_1) - g(x_2)$, 证明: $x_1 - 2x_2 \geq 1 - 2\ln 2$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线