2023年高三年级第三次适应性检测

数学参考答案及评分标准

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1--8：C B A D　B C A D

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

9．BD　　10．AC　　11．BCD　　12．ABD

三、填空题：本题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．$\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1$；　14．$\dfrac{4\pi}{3}$；　15．28；　16．$-1$．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

解：（1）因为 $2c\sin B=(2a-c)\tan C$，所以 $2c\sin B=(2a-c)\dfrac{\sin C}{\cos C}$ ……………… 1 分

所以 $2\sin C\sin B\cos C=(2\sin A-\sin C)\sin C$，

因为 $C\in(0,\pi)$，$\sin C>0$，所以 $2\sin B\cos C=2\sin A-\sin C$ ……………… 2 分

因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $2\sin B\cos C=2\sin(B+C)-\sin C=2\sin B\cos C+2\cos B\sin C-\sin C$，

所以 $2\cos B\sin C=\sin C$， ……………… 4 分

所以 $\cos B=\dfrac{1}{2}$，又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$ ……………… 5 分

（2）设 $a=x$，则 $c=3x$，由条件知 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$ ……………… 6 分

所以 $|\overrightarrow{BD}|^2=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})^2=\dfrac{1}{4}(a^2+c^2+2ac\cos B)=\dfrac{13}{4}x^2=13$ ……………… 7 分

所以 $x=2$ ……………… 8 分

所以 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=7x^2$，$b=2\sqrt{7}$ ……………… 9 分

所以周长 $l=a+b+c=4x+2\sqrt{7}=8+2\sqrt{7}$ ……………… 10 分

18．（12 分）

解：（1）取 B_1C_1 的中点 O_1，连结 A_1O_1，

因为 $AB=AC$，$A_1B_1C_1-ABC$ 为三棱台，$AB=2A_1B_1=4$，

所以 $A_1B_1=A_1C_1=2,\angle B_1A_1C_1=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $A_1O_1\perp B_1C_1$，$A_1O_1=\sqrt{2}$ ……………… 2 分

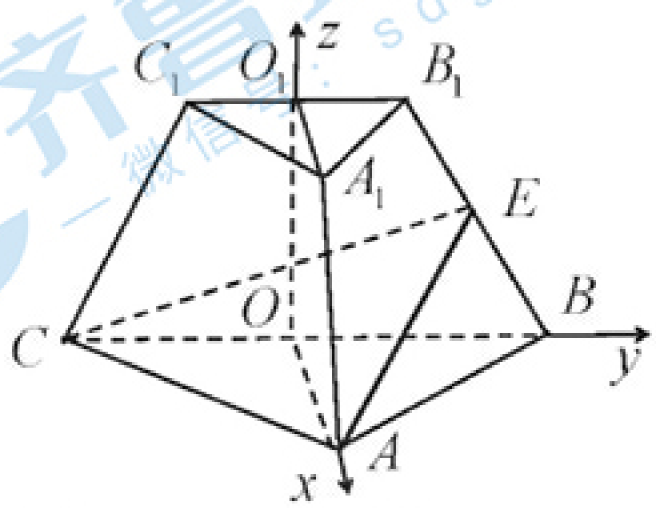
因为平面 $BCC_1B_1\perp$ 平面 ABC，平面 ABC // 平面 $A_1B_1C_1$，

所以平面 $BCC_1B_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，平面 $BCC_1B_1\cap$ 平面 $A_1B_1C_1=B_1C_1$，

所以 $A_1O_1\perp$ 平面 BCC_1B_1 ……………… 3 分

由条件知梯形 BCC_1B_1 的面积 $S=\dfrac{1}{2}(2\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times1=3\sqrt{2}$ ……………… 4 分

所以四棱锥 $A_1-BCC_1B_1$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ ……………………………………………5 分



(2) 取 BC 的中点 O，连结 AO，

因为 $AB=AC$，所以 $AO\perp BC$，

因为等腰梯形 BCC_1B_1 中，O_1,O 分别为上下底面 B_1C_1,BC 的中点

所以 $OO_1\perp BC$，

因为平面 $BCC_1B_1\perp$ 平面 ABC，平面 $BCC_1B_1\cap$ 平面 $ABC=BC$，

所以 $OO_1\perp$ 平面 ABC，

以 O 为原点，分别以 OA,OB,OO_1 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴建系如图，…………6 分

则 $A(2\sqrt{2},0,0),B(0,2\sqrt{2},0),C(0,-2\sqrt{2},0),\ B_1(0,\sqrt{2},1)$，

令 $\overrightarrow{BE}=m\overrightarrow{BB_1}\ (0<m<1)$，则 $E(0,2\sqrt{2}-\sqrt{2}m,m)$ ……………………………………7 分

设平面 ACE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{CA}=(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{CE}=(0,4\sqrt{2}-\sqrt{2}m,m)$，

则 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y=0$，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=(4\sqrt{2}-\sqrt{2}m)y+mz=0$，

令 $x=m$，可得 $\vec{n}=(m,-m,4\sqrt{2}-\sqrt{2}m)$ ……………………………………………………8 分

因为 $OO_1\perp$ 平面 ABC，所以 $\overrightarrow{OO_1}=(0,0,1)$ 为平面 ABC 的一个法向量……………9 分

记二面角 $E-AC-B$ 的平面角为 θ，$\cos\theta=\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{2}m}{\sqrt{2m^2+(4\sqrt{2}-\sqrt{2}m)^2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$ ……10 分

即 $6m^2+m-2=0$，解得 $m=\frac{1}{2}$ 或 $m=-\frac{2}{3}$（舍）……………………………………11 分

所以存在点 E 为 B_1B 的中点，使得二面角 $E-AC-B$ 的余弦值为 $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ ……………12 分

19.（12 分）

解：(1) 因为 $S_n+(-1)^n a_{n+1}=3^n$，所以 $S_{2n}+a_{2n+1}=9^n$，$S_{2n-1}-a_{2n}=\frac{1}{3}\cdot 9^n$ ……… 4 分

两式相减得，$a_{2n}+a_{2n+1}+a_{2n}=\frac{2}{3}\cdot 9^n$，所以 $b_n=a_{2n+1}+2a_{2n}=\frac{2}{3}\cdot 9^n$，…………6 分

(2) 因为 a_1,a_2,a_3 成等差数列，所以 $2a_2=a_1+a_3$，

又因为 $a_1-a_2=3$，$a_1+a_2+a_3=9$，所以 $a_1=6,a_2=3,a_3=0$ ………………………8 分

由 $S_n+(-1)^n a_{n+1}=3^n$ 可得，$S_{n+1}+(-1)^{n+1}a_{n+2}=3^{n+1}$，$(n\geq 1)$

两式相减得，$a_{n+1}+(-1)^{n+1}a_{n+2}-(-1)^n a_{n+1}=2\cdot 3^n$ ……………………………………9 分

当 $n=2k-2$，$k\geq 2$ 且 $k\in\mathrm{N}^*$ 时，$a_{2k}=-2\cdot 3^{2k-2}$，

此时 $S_{2k-1}=a_{2k}+3^{2k-1}=-2\cdot 3^{2k-2}+3^{2k-1}=3^{2k-2}$，$k\geq 2$ …………………………10 分

所以，$S_{2n-1}=\begin{cases}6, & n=1\\ 9^{n-1}, & n\geq 2\end{cases}$ ……………………………………………………12 分

20．（12分）

解：（1）由题知：$|PB|=4-|PA|$,即$|PB|+|PA|=4>2\sqrt{3}$ ……2分

所以曲线C是以$A(-\sqrt{3},0),B(\sqrt{3},0)$为焦点，长轴长$2a=4$的椭圆……3分

所以曲线C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ……4分

（2）设$Q(x_0,y_0)$，因为点$Q(x_0,y_0)$在椭圆C上，所以$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$ ……5分

因为直线$l:x=t$与圆Q相切于点M，所以$|QM|=|x_0-t|$ ……6分

$|QB|=\sqrt{(x_0-\sqrt{3})^2+y_0^2}$ ……7分

假设存在，则$|QB|=\sqrt{(x_0-\sqrt{3})^2+y_0^2}=m|QM|=m|x_0-t|$，

即$(x_0-\sqrt{3})^2+y_0^2=m^2(x_0-t)^2$，即$x_0^2-2\sqrt{3}x_0+3+y_0^2=m^2x_0^2-2m^2tx_0+m^2t^2$，

因为$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，所以$y_0^2=1-\frac{x_0^2}{4}$，

所以$(\frac{3}{4}-m^2)x_0^2+(2m^2t-2\sqrt{3})x_0+4-m^2t^2=0$恒成立……9分

所以$\frac{3}{4}-m^2=0$，$2m^2t-2\sqrt{3}=0$，$4-m^2t^2=0$ ……10分

解得$t=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$m=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以存在$m=\frac{\sqrt{3}}{2}$及定直线$l:x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，满足条件……12分

21．（12分）

解：（1）由题知：X的可能取值为$-1,0,1$； ……1分

$P(X=-1)=(1-\frac{3}{4})(1-\frac{2}{3})=\frac{1}{12}$；

$P(X=0)=\frac{3}{4}(1-\frac{2}{3})+(1-\frac{3}{4})\frac{2}{3}=\frac{5}{12}$；

$P(X=1)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$ ……4分

所以X的分布列为：

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$

所以$E(X)=-1\times\frac{1}{12}+0\times\frac{5}{12}+1\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$ ……6分

（2）假设答题n轮，记P_n表示“没有出现连续三轮每轮得1分”的概率，

由题知：$P_1=1,P_2=1,P_3=1-(\frac{1}{2})^3=\frac{7}{8},P_4=1-3(\frac{1}{2})^4=\frac{13}{16}$ ……7 分

经分析知：

P_n	第n轮	第$n-1$轮	第$n-2$轮
$\frac{1}{2}P_{n-1}$	没有得1分		
$\frac{1}{4}P_{n-2}$	得1分	没有得1分	
$\frac{1}{8}P_{n-3}$	得1分	得1分	没有得1分

所以$P_n=\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}+\frac{1}{8}P_{n-3}(n\geq 4)$ ……9 分

解得$a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{4},c=\frac{1}{8}$ ……10 分

因为$P_n=\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}+\frac{1}{8}P_{n-3}$，$P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}+\frac{1}{8}P_{n-2}$，

所以$P_{n+1}-P_n=-\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}+\frac{1}{8}P_{n-2}$

$$=-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}+\frac{1}{8}P_{n-3})-\frac{1}{4}P_{n-1}+\frac{1}{8}P_{n-2}$$

$$=-\frac{1}{16}P_{n-3}<0$$

所以$P_{n+1}<P_n(n\geq 4)$，且$P_1=P_2>P_3>P_4$，可得$P_1=P_2>P_3>P_4>P_5>\cdots$

所以答题轮数越多（轮数不少于3），出现“连续三轮每轮得1分”的概率越大……12 分

22．（12 分）

解：（1）由题得：$f(x)=\frac{\sin x+c}{e^x}$，$f'(x)=\frac{\cos x-\sin x-c}{e^x}$ ……2分

因为$f'(0)=1-c=0$，得$c=1$ ……3分

（2）因为$f(x)=\frac{b\sin x+1}{a^x}\leq 1$，所以$a^x-b\sin x-1\geq 0$ ……4分

令$F(x)=a^x-b\sin x-1$，$F'(x)=a^x\ln a-b\cos x$，

①若$0<a<1$，则$F(\pi)=a^\pi-1<0$，不合题意 ……5分

②若$a>1$，

1°当$b\leq 0$时，则$F(x)=a^x-1-b\sin x\geq 0$，适合 ……6分

2°当$0<b\leq\ln a$时，则$F'(x)=a^x\ln a-b\cos x\geq a^x\ln a-b\geq\ln a-b\geq 0$，

所以，$F(x)$在$[0,\pi]$单调递增，$F(x)\ge F(0)=0$，适合……………………………7分

3°当$b>\ln a$，令$g(x)=F'(x)$，则$g'(x)=a^x(\ln a)^2+b\sin x\ge 0$，

所以$F'(x)$在$[0,\pi]$上单调递增，$F'(0)=\ln a-b<0,F'(\pi)=a^{\pi}\ln a+b>0$，

所以存在$x_0\in(0,\pi)$使得$F'(x_0)=0$，且$F(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，

所以，当$x\in(0,x_0)$时，$F(x)<F(0)=0$；不合题意

综上，$b\le\ln a$且$a>1$……………………………………………………………………9分

所以$a-eb\ge a-e\ln a$，令$h(a)=a-e\ln a(a>1)$……………………………………10分

则$h'(a)=1-\dfrac{e}{a}=\dfrac{a-e}{a}$，令$h'(a)=0$，解得$a=e$，

当$1<a<e$时，$h'(a)<0$，$h(a)$在$(1,e)$上单调递减；

当$a>e$时，$h'(a)>0$，$h(a)$在$(e,+\infty)$上单调递增；

所以$h(a)\ge h(e)=e\ln e-e=0$，所以$a\ge eb$……………………………………12分