1. B 【解析】本题考查集合的运算，考查数学运算的核心素养.

$A=(-\infty,3)$，$B=(-\infty,-1)$，则 $A\cap B=(-\infty,-1)$.

2. B 【解析】本题考查复数的运算，考查数学运算的核心素养.

因为 $iz=1-2i$，所以 $z=\frac{1-2i}{i}=-2-i$.

3. D 【解析】本题考查三角函数，考查直观想象的核心素养.

$f(x)=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos x$，则 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2\pi$.

4. B 【解析】本题考查线性规划，考查数形结合的数学思想.

画出可行域(图略)知，当 $l:z=2x+y-1$ 平移到过点 $(2,3)$ 时，z 取得最大值，且最大值为 6.

5. C 【解析】本题考查古典概型，考查逻辑推理的核心素养.

这 5 个数中 1，3，5 为奇数，从这 5 个数中随机选出 2 个数共有 10 种情况，其中都是奇数的有 3 种情况，则所求的概率为 0.3.

6. D 【解析】本题考查正态分布，考查逻辑推理的核心素养.

测试成绩大于 110 分的概率等于 0.5，故选 D.

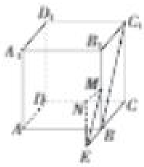
7. C 【解析】本题考查极值，考查数学运算的核心素养.

$f'(x)=3x^2+a$，所以 $f'(1)=3+a=0$，则 $a=-3$，所以 $f(1)=-2$.

8. D 【解析】本题考查二项式定理，考查数学运算的核心素养.

因为 $(x+2)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，令 $x=0$，得 $a_0=16$，令 $x=-1$，得 $a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=1$，所以 $a_4-a_3+a_2-a_1=1-16=-15$.

9. A 【解析】本题考查异面直线所成的角，考查空间想象能力.



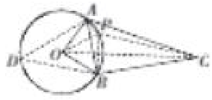
延长 CB 到点 E，使得 $EB=\frac{1}{2}BC$，连接 ME，NE，易知 $ME\parallel BC_1$，所以 $\angle NME$ 为异面直线 MN 和 BC_1 所成的角. 设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则 $ME=\sqrt{2}$，$NE=\sqrt{10}$，$MN=\sqrt{6}$，所以 $|\cos\angle NME|=\left|\frac{2+6-10}{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

10. D 【解析】本题考查比较大小，考查逻辑推理的核心素养.

由题意知，$a=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，$a=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}>\frac{1}{2}$，$b=\sin 1>\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$c=\log_5 2<$

11. B 【解析】本题考查解三角形的实际应用，考查逻辑推理的核心素养.

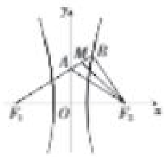
如图，因为$\angle APB=\frac{2\pi}{3}$，所以$P$在如图所示的圆$O$上，



圆O的半径为$\frac{1}{2}\times\frac{10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=10$，

由圆周角的性质可得$\angle ADB=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，$\angle AOB=\frac{\pi}{3}\times 2=\frac{2\pi}{3}$，$\angle OBA=\angle OAB=\frac{\pi}{6}$，连接$OC$，可得$OP+CP\geq OC$，所以当$P$为$OC$与圆的交点时，$CP$取最小值，即$CP=OC-OP$，又$OB=OP=10$，在$\triangle OBC$中，$OB=10$，$BC=40$，$\angle OBC=\frac{2\pi}{3}$，根据余弦定理可知$OC=\sqrt{10^2+40^2-2\times10\times40\times(-\frac{1}{2})}=10\sqrt{21}$，所以$CP$的最小值为$(10\sqrt{21}-10)$m.

12. A 【解析】本题考查双曲线，考查直观想象的核心素养.



如图，由题可知$|AF_1|=|AF_2|=|BF_2|$，又因为$|BF_1|-|BF_2|=2a$，所以$|AB|=2a$，因为直线l的斜率为$\frac{1}{2}$，所以$|AO|=\frac{c}{2}$，$|AF_1|=\frac{\sqrt{5}c}{2}$，设$M$为$AB$的中点，连接$MF_2$，易知$\triangle AOF_1\backsim\triangle F_2MF_1$，所以$\frac{|F_1F_2|}{|AF_1|}=\frac{|F_1M|}{|F_1O|}$，

则$\frac{2c}{\frac{\sqrt{5}c}{2}}=\frac{a+\frac{\sqrt{5}}{2}c}{c}$，解得$a=\frac{3\sqrt{5}}{10}c$，所以双曲线$C$的离心率为$\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

13. -2 【解析】本题考查平面向量，考查数学运算的核心素养.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times(-1)+(-2)\times0=-2$.

14. $-\frac{\pi}{6}$ 【解析】本题考查三角恒等变换，考查数学运算的核心素养.

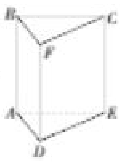
因为$f(x)=\sin(4x+\varphi)(-\frac{\pi}{2}<\varphi<0)$的图象关于点$(\frac{\pi}{24},0)$对称，所以$\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，因为$-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

15. $\sqrt{2}$ 【解析】本题考查抛物线，考查直观想象的核心素养.

设$A(x_0,y_0)$，由$|AF|=3|OF|$，可得$x_0+1=3$，所以$x_0=2$，则$y_0^{\ 2}=8$，即$|y_0|=2\sqrt{2}$，所以$\triangle OAF$的面积为$\frac{1}{2}\times1\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

16. 28π 【解析】本题考查外接球的应用，考查逻辑推理的核心素养.

将四面体$ABCD$补成如图所示的直三棱柱$ADE-BFC$,因为向量$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{AD}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$,所以$\angle EAD=\frac{\pi}{3}$,则该四面体外接球的半径$R=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$,



所以该四面体外接球的表面积为$4\pi\times(\sqrt{7})^2=28\pi$.

17. 解:(1)由题可知,等比数列$\{a_n\}$的公比$q=\frac{a_3+a_2}{a_2+a_1}=2$. ……………… 2分

又$a_1+a_2=6$,所以$a_1+2a_1=6$,解得$a_1=3$. ……………… 4分

所以$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2^n$. ……………… 6分

(2)$S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$, ……………… 9分

令$S_n\leqslant 14$,解得$n\leqslant 3$,所以使得$S_n\leqslant 14$成立的正整数n的最大值为3. ……………… 12分

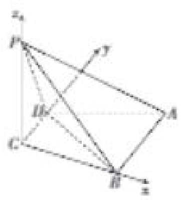
18. (1)证明:因为$\angle BDC=60^\circ$,$BD=2CD=2$,所以由余弦定理可得$BC=\sqrt{3}$, ……………… 1分

所以$BD^2=CD^2+BC^2$,则$BC\perp CD$. ……………… 2分

因为平面$PCD\perp$平面$ABCD$,且相交于CD,所以$BC\perp$平面PCD. ……………… 4分

因为$PD\subset$平面PCD,所以$BC\perp PD$. ……………… 5分

(2)解:如图,以CB,CD,CP所在直线分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系,则$A(\sqrt{3},2,0)$,$D(0,1,0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$, ……………… 6分



易得平面PCD的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(1,0,0)$, ……………… 8分

设平面PAD的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

$\overrightarrow{DA}=(\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{DP}=(0,-1,\sqrt{3})$,

由$\begin{cases}\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0,\\ -y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

取$y=\sqrt{3}$,得$x=-1$,$z=1$,所以$\boldsymbol{m}=(-1,\sqrt{3},1)$, ……………… 10分

所以$|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以二面角$A-PD-C$的正弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ……………… 12分

19. 解:(1)由题可知X的可能取值为0,1,2,

$P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_4^2}\times(\frac{1}{3})^2+\frac{C_3^1C_1^1}{C_4^2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{18}+\frac{1}{8}=\frac{13}{72}$, ……………… 2分

$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_4^2}\times(\frac{2}{3})^2+\frac{C_3^1C_1^1}{C_4^2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{9}+\frac{1}{12}=\frac{11}{36}$, ……………… 3分

$P(X=1)=1-P(X=0)-P(X=2)=\frac{37}{72}$, ……………… 4分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{13}{72}$	$\frac{37}{72}$	$\frac{11}{36}$

………………………………………………………………………… 5分

$E(X)=0\times\frac{13}{72}+1\times\frac{37}{72}+2\times\frac{11}{36}=\frac{9}{8}$. ………………………………………… 7分

(2)设 Y 为甲选择 B 组答对题目的个数,$Y\sim B(2,0.6)$, ………………………………………… 9分

则 $E(Y)=2\times0.6=1.2>\frac{9}{8}$, ………………………………………………………… 11分

故甲应选 B 组答题. ……………………………………………………………………… 12分

20.(1)解:由 $|FM|=3|FN|$,可得 $a+c=3(a-c)$,解得 $a=2c$, ………………………………… 1分

又因为 $a^2=b^2+c^2$,所以 $b=\sqrt{3}c$, ……………………………………………………… 2分

因为点 $P(1,\frac{3}{2})$ 在椭圆 E 上,所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{\frac{9}{4}}{b^2}=1$, ………………………………………… 3分

解得 $a=2,b=\sqrt{3},c=1$,所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………… 4分

(2)证明:当 l 与 x 轴重合时,$|AB|=|CD|=4$,所以 $\frac{12}{|AB|}+\frac{|CD|^2}{4}=7$, ……………… 5分

当 l 不与 x 轴重合时,设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,直线 l 的方程为 $x=my+1$,

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=my+1,\end{cases}$ 整理得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$,

则 $y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4},y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$, ………………………………………………… 6分

故 $|AB|=\sqrt{(1+m^2)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=\sqrt{(1+m^2)[(\frac{-6m}{3m^2+4})^2+\frac{36}{3m^2+4}]}=12\times\frac{m^2+1}{3m^2+4}$, ………………………………………………………………………… 8分

圆心 O 到直线 l 的距离为 $\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$,则 $\frac{|CD|^2}{4}=4-\frac{1}{m^2+1}$, ………………………… 10分

所以 $\frac{12}{|AB|}+\frac{|CD|^2}{4}=\frac{3m^2+4}{m^2+1}+4-\frac{1}{m^2+1}=7$,即 $\frac{12}{|AB|}+\frac{|CD|^2}{4}$ 为定值. …………… 12分

21. 解:(1)$f(1)=e$, ……………………………………………………………………… 1分

因为 $f(x)=\frac{e^x}{x}+\ln x$,所以 $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}+\frac{1}{x}$,则 $f'(1)=1$, …………………… 3分

(2)(正整数 a 可以为 1 和 2，下面写对一个即可得满分)

当 $a=1$ 时，$f(x)>3\ln x+\frac{1}{x}$ 恒成立，即 $e^x-2x\ln x-1>0$ 恒成立，………… 6分

证明过程如下.

令 $g(x)=e^x-2x\ln x-1$，

①当 $0<x\leqslant 1$ 时，$e^x>1$，$x\ln x\leqslant 0$，所以 $g(x)>0$. ………… 8分

②当 $x>1$ 时，$g'(x)=e^x-2\ln x-2$，令 $h(x)=e^x-2\ln x-2$，$x>1$，

则 $h'(x)=e^x-\frac{2}{x}$，可知 $h'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ………… 9分

当 $x=1$ 时，$h'(1)>0$，所以 $h'(x)>0$，即 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，………… 10分

又因为 $h(1)=e-2>0$，所以 $g'(x)>0$，即 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，………… 11分

所以 $g(x)>g(1)=e-1>0$ 成立. ………… 12分

当 $a=2$ 时，$f(x)>5\ln x+\frac{1}{x}$ 恒成立，即 $e^x-4x\ln x-1>0$ 恒成立，………… 6分

证明过程如下.

令 $g(x)=e^x-4x\ln x-1$，

①当 $0<x\leqslant 1$ 时，$e^x>1$，$x\ln x\leqslant 0$，所以 $g(x)>0$. ………… 8分

②当 $x>1$ 时，$g'(x)=e^x-4\ln x-4$，令 $h(x)=e^x-4\ln x-4$，$x>1$，

则 $h'(x)=e^x-\frac{4}{x}$，可知 $h'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ………… 9分

又因为 $h(1)<0$，$h(2)>0$，所以存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $h(x_0)=0$，即 $e^{x_0}-4\ln x_0-4=0$，………… 10分

所以 $g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}-4x_0\ln x_0-1=4\ln x_0+4-4x_0\ln x_0-1=4\ln x_0(1-x_0)+3$，

因为 $x_0\in(1,2)$，所以 $4\ln x_0(1-x_0)+3>0$，

即 $e^x-4x\ln x-1>0$ 恒成立. ………… 12分

22. 解：(1)圆 M 的普通方程为 $(x-3)^2+y^2=2$，展开得 $x^2+y^2-6x+7=0$. ………… 2分

由 $\begin{cases}x^2+y^2=\rho^2,\\ x=\rho\cos\theta,\end{cases}$ 得圆 M 的极坐标方程为 $\rho^2-6\rho\cos\theta+7=0$. ………… 4分

(2)把 $\theta=\alpha$ 代入 $\rho^2-6\rho\cos\theta+7=0$，得 $\rho^2-6\rho\cos\alpha+7=0$，

则 $|OA|$，$|OB|$ 是 $\rho^2-6\rho\cos\alpha+7=0$ 的两个根，

所以 $|OA|+|OB|=6\cos\alpha$，$|OA||OB|=7$，………… 6分

则$\frac{1}{|OA|}+\frac{1}{|OB|}=\frac{|OA|+|OB|}{|OA||OB|}=\frac{6\cos\alpha}{7}=\frac{4\sqrt{2}}{7}$，解得$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，………………………… 8分

所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{1}{3}$，

所以$\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$，即直线$AB$的直角坐标方程为$y=\frac{\sqrt{2}}{4}x$. ………………………… 10分

23. 解：(1)因为$f(x)<3+|2x+2|$，所以$|2x-1|+|2x+2|<3+|2x+2|$，即$|2x-1|<3$，…
…………………………………………………………………………………… 2分

所以$-3<2x-1<3$，则$-1<x<2$，所以不等式的解集为$(-1,2)$. ………………………… 4分

(2)由$|2x-1|+|2x+2|\geq|2x-1-(2x+2)|=3$，得$M=3$， ………………………… 6分

则$a^2+2b^2=3$，

由柯西不等式可知$(a^2+2b^2)(4+\frac{1}{2})\geq(2a+b)^2$， ………………………… 8分

则$3\times\frac{9}{2}\geq(2a+b)^2$，解得$2a+b\leq\frac{3\sqrt{6}}{2}$，当且仅当$a=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$b=\frac{\sqrt{6}}{6}$时，等号成立，

所以$2a+b$的最大值为$\frac{3\sqrt{6}}{2}$. ………………………… 10分