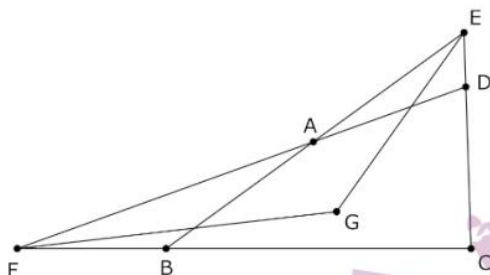


2021 初中数学测试

一、填空（每题 5 分，共 50 分）

- $|x-1|+2|x-2|+3|x-3|+4|x-4|+5|x-5|+6|x-6|$ 的最小值是 _____
- 方程 $\frac{x+134}{2021} = \frac{2x+216}{1978} - \frac{x+83}{1935}$ 的解的整数部分是 _____
- 设 $m_1, m_2, \dots, m_{13}$ 是 13 个两两不同的正整数， $m_1 + m_2 + \dots + m_{13} = 488$ ，设 a 是其中任意 3 个数相加得到和的最小值，则 a 最大可以是 _____
- 满足 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 且 $|a|, |b|, |c| \leq 11$ 的整数 a, b, c 一共有 _____ 组
- 如图所示， $\angle ADC = 72^\circ, \angle ABC = 36^\circ, \angle AEG = \frac{1}{3}\angle AEC, \angle AFG = \frac{2}{3}\angle AFC$ ，则 $\angle EGF =$ _____



- 已知 a, b, c 满足 $\begin{cases} 2021a + b + c = 2022 \\ a + 2021b + c = 2023 \\ a + b + 2021c = 2024 \end{cases}$ ，则 $b =$ _____
- 设 $f(a, b, c)$ 是 $(a+b+c)^7 - a^7 - b^7 - c^7$ 的四次不可约因式且 $f(a, b, c)$ 的系数的最大公因数是 1，则 $|f(1, 1, 1)| =$ _____
- 已知 $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-3} + \frac{9}{x-5} = 1$ 的三个根从小到大为 α, β, γ ，则区间 $[1, \alpha], [3, \beta], [5, \gamma]$ 的长度之和为 _____

9. 梯形 $ABCD$ 中 $AB \parallel CD$, O 是对角线交点, 如果 $S_{\triangle COD} = 9$, $S_{\triangle AOB} = 36$, 则梯形 $ABCD$

面积的整数部分为 _____

10. 设 a 是一个有理数且 a 的十进制小数表示中, 小数点后连续出现了 2, 0, 2, 1 这四个数字,

则 a 的分母的最小值是 _____

二、 解答或证明题 (第一题 10 分, 第二, 三题每题 20 分。)

1. 在实数范围内解方程 $x^3 - 9x^2 + 3x - 3 = 0$

2. 设 $m_1, m_2, \dots, m_{26}$ 是 26 个正整数且它们的质因数均小于 100, 求证: 其中一定若干个 (含一个) 正整数的乘积是完全平方数

3. 如果 $\triangle XYZ$ 相似于 $\triangle ABC$ (即 $\angle X = \angle A, \angle Y = \angle B, \angle Z = \angle C$) 且 X 在 BC 上, Y 在 AC 上, Z 在 AB 上, $\triangle XYZ$ 的三条高线交于 H , 求证: $HA = HB = HC$

答题卡（仅此页和下一面提交）

姓名 学校 联系电话

填空	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案										

解答或者证明

1.

2

3.

答题卡（仅上一页面和此页面提交）

姓名 学校 联系电话

2021 初二数学测试

一、 填空（每题 5 分，共 50 分）

1. $|x-1|+2|x-2|+3|x-3|+4|x-4|+5|x-5|+6|x-6|$ 的最小值是 _____

解： 设 $x_1=1, x_2=x_3=2, x_4=x_5=x_6=3, \dots, x_{16}=\dots=x_{21}=6$ ， 则 $\sum_{i=1}^n |x-x_i|$ 在

$x=x_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ 处取最小值， 也就是 $x=5$ 时， 最小值为 $4+6+6+4+6=26$

2. 方程 $\frac{x+134}{2021} = \frac{2x+216}{1978} - \frac{x+83}{1935}$ 的解的整数部分是 _____

解： 即 $\frac{(x-7)+2 \times 47}{2021} = \frac{2(x-7)+5 \times 46}{1978} - \frac{(x-7)+2 \times 45}{1935}$ ， 故 $x=7$

3. 设 $m_1, m_2, \dots, m_{13}$ 是 13 个两两不同的正整数， $m_1+m_2+\dots+m_{13}=488$ ， 设 a 是其中任意 3 个数相加得到和的最小值， 则 a 最大可以是 _____

解： 不妨设 $m_1 < m_2 < \dots < m_{13}$ ， 则 $a=m_1+m_2+m_3$ ， 要让 a 最大， 因让 $m_1 \sim m_{13}$ 尽可能地平均； 由 $488=31+32+33+34+35+36+37+38+39+40+41+42+50$ 知道 a 最大为 96

4. 满足 $a^3+b^3+c^3=3abc$ 且 $|a|, |b|, |c| \leq 11$ 的整数 a, b, c 一共有 _____ 组

解： $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=0$

故 $a=b=c$ 或 $a+b+c=0$

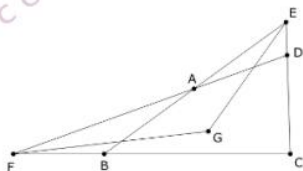
当 $a=b=c$ 时， 有 23 组

当 $a+b+c=0$ 时， 有 397 组

共 420 组， 其中重复， 故答案为 419

5. 如图所示， $\angle ADC=72^\circ, \angle ABC=36^\circ, \angle AEG=\frac{1}{3}\angle AEC, \angle AFG=\frac{2}{3}\angle AFC$ ， 则

$\angle EGF =$ _____



解：设 $\angle ADE = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle ECF = x$, 则

$$\angle AEG = \frac{180^\circ - x - \beta}{3}, \angle XFG = \frac{2(180^\circ - x - \alpha)}{3}, \angle EAF = \alpha + \beta + x$$

则

$$\begin{aligned} \angle EGF &= 360^\circ - \left[\alpha + \beta + x + \frac{180^\circ - x - \beta}{3} + \frac{2(180^\circ - x - \alpha)}{3} \right] \\ &= 180^\circ - \frac{\alpha}{3} - \frac{2\beta}{3} = 180^\circ - \frac{72^\circ}{3} - \frac{2 \times 36^\circ}{3} = 132^\circ \end{aligned}$$

6. 已知 a, b, c 满足
$$\begin{cases} 2021a + b + c = 2022 \\ a + 2021b + c = 2023 \\ a + b + 2021c = 2024 \end{cases}$$
, 则 $b =$ _____

解：答案是 1

7. 设 $f(a, b, c)$ 是 $(a+b+c)^7 - a^7 - b^7 - c^7$ 的四次不可约因式且 $f(a, b, c)$ 的系数的最大公因数是 1, 则 $|f(1, 1, 1)| =$ _____

解：

$$\begin{aligned} &(a+b+c)^7 - a^7 - b^7 - c^7 \\ &= 7(a+b)(a+c)(b+c)(a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 + 2a^3c + 5a^2bc + \dots) \end{aligned}$$

则 $|f(1, 1, 1)| = 39$

8. 已知 $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-3} + \frac{9}{x-5} = 1$ 的三个根从小到大为 α, β, γ , 则区间 $[1, \alpha], [3, \beta], [5, \gamma]$ 的长度之和为 _____

解：韦达定理，答案为 13

9. 梯形 $ABCD$ 中 $AB \parallel CD$, O 是对角线交点, 如果 $S_{\triangle COD} = 9, S_{\triangle AOB} = 36$, 则梯形 $ABCD$ 面积的整数部分为 _____

解： $9 + 36 + 2\sqrt{9 \times 36} = 9 + 36 + 36 = 81$

10. 设 a 是一个有理数且 a 的十进制小数表示中, 小数点后连续出现了 2, 0, 2, 1 这四个数字, 则 a 的分母的最小值是 _____

解：答案 94, 取 $\frac{19}{94}$ 即可

二、 解答或证明题（第一题 10 分，第二，三题每题 20 分）

1. 在实数范围内解方程 $x^3 - 9x^2 + 3x - 3 = 0$

解: $2(x-1)^3 = (x+1)^3, \sqrt[3]{2}(x-1) = x+1, x = \frac{1+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}$

2. 设 $m_1, m_2, \dots, m_{26}$ 是 26 个正整数且它们的质因数均小于 100, 求证: 其中一定若干个 (含一个) 正整数的乘积是完全平方数

解: 设 1~100 的质数为 $p_1, p_2, \dots, p_{25}$, 设 $S = \{m_1, \dots, m_{26}\}$

对任意的 $A \subseteq S$, 设 A 中元素的乘积 $= p_1^{\alpha_1} \cdots p_{25}^{\alpha_{25}}$, 则 $\alpha_1, \dots, \alpha_{25}$ 按照奇偶分类有 2^{25}

类, 而 S 有 $2^{26} - 1$ 个非空子集, 故存在两个不相同的子集合 $A_1, A_2 \subseteq S, A_1$ 元素的乘积

与 A_2 元素的乘积的质因数中每个 p_i 的指数同奇偶, 故

A_1 元素的乘积 $\times A_2$ 元素的乘积为平方数

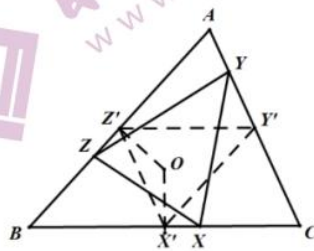
设 $B_1 = A_1 \setminus A_2, B_2 = A_2 \setminus A_1, B = B_1 \cup B_2$, 则 $B \neq \emptyset$ 且 B 中元素的乘积为平方数

3. 如果 $\triangle XYZ$ 相似于 $\triangle ABC$ (即 $\angle X = \angle A, \angle Y = \angle B, \angle Z = \angle C$) 且 X 在 BC 上, Y 在 AC 上, Z 在 AB 上, $\triangle XYZ$ 的三条高线交于 H , 求证: $HA = HB = HC$

证明: 如图, 设 X', Y', Z' 为 $\triangle ABC$ 三边的中点, 易知 $\triangle X'Y'Z' \sim \triangle ABC$.

设 O 是 $\triangle X'Y'Z'$ 的垂心, 由 $OX' \perp Z'Y'$, $Z'Y' \parallel BC$ 得 $OX' \perp BC$, 即 OX' 为 BC 的中垂线, 因此 O 为 $\triangle ABC$ 的外心.

由 $\triangle X'Y'Z' \sim \triangle XYZ$ 相似, 以 O 为位似中心作位似旋转变换, 使 $\triangle X'Y'Z'$ 变换到 $\triangle XYZ$, $\therefore O$ 为 $\triangle X'Y'Z'$ 的垂心, 故 O 为 $\triangle XYZ$ 的垂心. 即 O 为 $\triangle ABC$ 的外心和 $\triangle XYZ$ 的垂心.



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。

总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》