

## 江西省上饶市六校 2023 届高三第二次联考

### 数学（理科）试题参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求。

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 答案 | C | D | B | C | D | D | D | C | B | D  | C  | D  |

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.  $\frac{16}{3}$       14.  $2\sqrt{2}$       15.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  或  $\sqrt{3}$       16.  $\frac{2}{9}$

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：（1）因为  $a(\sin A + \sin B) = 2b \sin B$ ,

所以由正弦定理得  $a(a+b) = 2b^2$ , 整理得  $(a+2b)(a-b) = 0$ ,

因为  $a+2b > 0$ , 所以  $a=b$ , 即  $A=B$ . (6 分)

（2）设  $BD=x$ , 则  $AD=2x$ ,

由余弦定理可得  $\cos \angle CDA = \frac{4x^2 + 17 - 25}{2 \times 2x \times \sqrt{17}}$ ,  $\cos \angle CDB = \frac{x^2 + 17 - 25}{2 \times x \times \sqrt{17}}$ .

因为  $\angle CDA = \pi - \angle CDB$ , 所以  $\frac{4x^2 + 17 - 25}{2 \times 2x \times \sqrt{17}} = -\frac{x^2 + 17 - 25}{2 \times x \times \sqrt{17}}$ , 解得  $x=2$ ,

所以  $c = AB = 3BD = 6$ . (12 分)

18. 解：（1）存在点  $F$  满足题意，且  $\frac{BF}{FC} = \frac{1}{2}$ , 理由如下：

在图①中，取  $B'C'$  的中点  $M$ , 连接  $AM$ , 则  $AM \parallel DH$ ,

在图②中， $AM \parallel DH$ ,  $AM \not\subset$  平面  $BDH$ ,  $DH \subset$  平面  $BDH$ ,

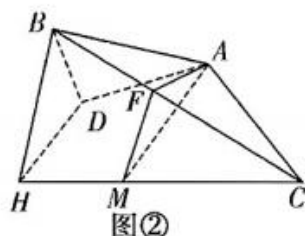
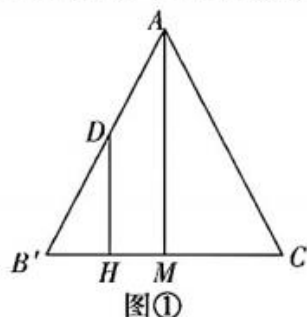
所以  $AM \parallel$  平面  $BDH$ ，且  $\frac{HM}{MC} = \frac{1}{2}$ ； (2分)

在线段  $BC$  上取点  $F$  使  $\frac{BF}{FC} = \frac{1}{2}$ ，

连接  $MF, FA$ ，则  $MF \parallel BH$ ，同理可得  $MF \parallel$  平面  $BDH$ ，

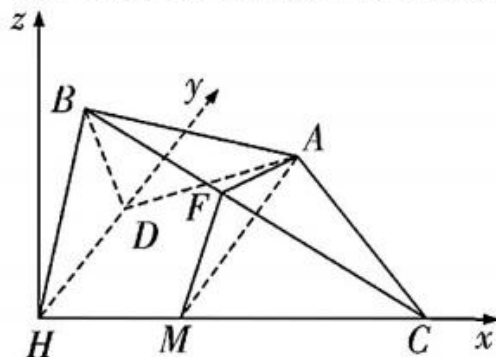
又因为  $MF \cap AM = M$ ，所以平面  $AMF \parallel$  平面  $BDH$ ，

又因为  $AF \subset$  平面  $AMF$ ，所以  $AF \parallel$  平面  $BDH$ 。 (4分)



(2) 在图②中， $DH \perp HC, DH \perp HB, HC \cap HB = H$ ，所以  $DH \perp$  平面  $BHC$ ，

以  $H$  为原点建立如图所示的空间直角坐标系，



则  $H(0,0,0), A\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 0\right), C\left(\frac{3}{2}, 0, 0\right), D\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ , (6分)

设  $\angle BHC = \theta \in (0, \pi)$ ，则  $B\left(\frac{1}{2}\cos\theta, 0, \frac{1}{2}\sin\theta\right)$ ，

$\overrightarrow{DB} = \left(\frac{1}{2}\cos\theta, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\sin\theta\right), \overrightarrow{DA} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ，



设平面  $BDA$  的法向量为  $\vec{m} = (x, y, z)$ ,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \overrightarrow{DA} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{DA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} y + \frac{z}{2} \sin \theta = 0, \\ \frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} y + \frac{z}{2} \sin \theta = 0, \\ x = -\sqrt{3} y, \end{cases}$$

令  $y = 1$ , 则  $x = -\sqrt{3}, z = \frac{\sqrt{3}(1 + \cos \theta)}{\sin \theta}$ , 即  $\vec{m} = \left( -\sqrt{3}, 1, \frac{\sqrt{3}(1 + \cos \theta)}{\sin \theta} \right)$ ,

易知平面  $BHC$  的一个法向量  $\vec{n} = (0, 1, 0)$ , (8分)

若平面  $BHC$  与平面  $BDA$  所成的二面角的余弦值为  $\frac{1}{3}$ , 则  $\frac{1}{\sqrt{3+1+3\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}} = \frac{1}{3}$ ,

化简整理得:  $\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \sqrt{\frac{5}{3}}$ ,

所以  $\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3}{5}}, \sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}, \cos \theta = \frac{1}{4}$ , 所以  $B\left(\frac{1}{8}, 0, \frac{\sqrt{15}}{8}\right)$ ,

则三棱锥  $B-DCH$  的高为  $\frac{\sqrt{15}}{8}$ , (10分)

又因为底面积  $S_{DCH} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ ,

所以三棱锥  $B-DCH$  的体积为  $V_{B-DCH} = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{8} \times \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{3\sqrt{5}}{64}$ . (12分)

19. 解: (1) 由题意可知,  $X$  可能取值为 0, 1, 2, (1分)

$$\text{则 } P(X=0) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{2}{5}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 C_4^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}, \quad (3 \text{ 分})$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}. \quad (4 \text{ 分})$$

则随机变量  $X$  的分布列为

|     |               |                |                |
|-----|---------------|----------------|----------------|
| $X$ | 0             | 1              | 2              |
| $P$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{1}{15}$ |

$$\text{数学期望为 } E(X) = 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{3}. \quad (6 \text{ 分})$$

$$(2) \quad \bar{x} = \frac{20+40+60+80+100+120+140}{7} = 80, \quad (7 \text{ 分})$$

$$\bar{y} = \frac{210+206+196+191+188+186}{7} = 197, \quad (8 \text{ 分})$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{-2380}{11200} = -\frac{17}{80},$$

$$\text{故 } \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 214, \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{所以线性回归方程为 } \hat{y} = -\frac{17}{80}x + 214, \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{当 } x = 200 \text{ 时, } \hat{y} = -\frac{17}{80} \times 200 + 214 = 171.5,$$

所以估计该平板电脑使用第 200 次时充满电后的工作时长约为 171.5 分钟. (12 分)

20. 解: (1)  $\because a = \sqrt{3}, b = 1.$

$$\therefore \text{椭圆 } C_1 \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1. \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 设  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$ ,  $\triangle OPQ$  斜边  $PQ$  上的高为  $h$ ,

$$\because OP \perp OQ, \therefore |OP| |OQ| = h |PQ|,$$

$$\therefore \frac{1}{h^2} = \frac{|OP|^2 + |OQ|^2}{|OP|^2 |OQ|^2} = \frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2}, \quad (6 \text{ 分})$$

$\because$  点  $O$  到直线  $PQ$  的距离  $h$  为常数, 由题意  $\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2}$  为常数

当  $OP$  的斜率存在时, 由题意得  $OP$  的斜率不为 0 设直线  $OP$  为  $y = kx$ ,

则直线  $OQ$  为  $y = -\frac{1}{k}x$ .

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得 } x^2 + 3k^2 x^2 = 3, \therefore x_1^2 = \frac{3}{1+3k^2}, \therefore |OP|^2 = (1+k^2) \frac{3}{1+3k^2}$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = -\frac{1}{k}x \\ y = -\frac{p}{2} \end{cases} \text{ 得 } -\frac{p}{2} = -\frac{1}{k}x, \therefore x_2 = \frac{pk}{2},$$

$$\therefore |OQ|^2 = \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \frac{p^2 k^2}{4} = \frac{(1+k^2)p^2}{4} \quad (8 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2} = \frac{1+3k^2}{3(1+k^2)} + \frac{4}{(1+k^2)p^2} = \frac{p^2(1+3k^2)+12}{3(1+k^2)p^2} = \frac{3p^2 k^2 + 12 + p^2}{3k^2 p^2 + 3p^2}$$

$$\therefore 3p^2 = 12 + p^2, \therefore p = \sqrt{6}. \quad (10 \text{ 分})$$

当  $OP$  的斜率不存在时,  $P(\pm\sqrt{3}, 0)$ ,  $Q\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ ,  $p = \sqrt{6}$

符合点  $O$  到直线  $PQ$  的距离为常数,

$$\therefore p = \sqrt{6} \quad (12 \text{ 分})$$



21. 解: (1) 由  $f'(x) = \frac{6}{x \ln a} - \frac{24}{x} + 12x^2 - 18x \geq 0$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立

则  $-\frac{1}{\ln a} \leq 2x^3 - 3x^2 - 4$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立 (2 分)

$$\text{令 } g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$$

$$\text{由 } g'(x) = 6x^2 - 6x \geq 0 \text{ 得 } x \geq 1$$

$$g'(x) \leq 0 \text{ 得 } 0 < x < 1$$

$$\therefore g(x)_{\max} = g(1) = -5 \quad (4 \text{ 分})$$

$$\therefore -\frac{1}{\ln a} \leq -5 \Rightarrow \frac{1}{\ln a} \geq 5$$

$$\text{解得 } 1 < a \leq e^{\frac{1}{5}} \quad (5 \text{ 分})$$

$$(2) a = e \text{ 时, } F(x) = -18 \ln x - 9x^2 + 9x$$

$$\text{由 } F(m) + F(n) = 0 \text{ 得 } -9(m^2 + n^2) + 9(m + n) - 18(\ln m + \ln n) = 0 \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{即 } -(m+n)^2 + (m+n) = 2 \ln(mn) - 2mn \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{令 } t = mn, h(t) = 2 \ln t - 2t$$

$$\text{由 } h'(t) = \frac{2}{t} - 2 = \frac{2(1-t)}{t} \geq 0 \quad \text{得 } 0 < t < 1$$

$$\therefore h(t)_{\max} = -2 \quad (11 \text{ 分})$$

$$\therefore -(m+n)^2 + (m+n) \leq -2$$

$$\text{即 } (m+n)^2 - (m+n) - 2 \geq 0 \quad \text{解得 } m+n \geq 2 \quad (12 \text{ 分})$$

22. 解: (1) 曲线  $C_1$  的普通方程为  $\cos \alpha \cdot y - \sin \alpha \cdot x = 0$ ,

则曲线  $C_1$  的极坐标方程为  $\theta = \alpha (\rho \in R)$ . (3 分)

曲线  $C_2$  的直角坐标方程为  $x^2 + y^2 - 2x = 3$ , 即  $(x-1)^2 + y^2 = 4$ . (5分)

(2) 曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho^2 - 2\cos\theta \cdot \rho - 3 = 0$ , 代入  $\theta = \alpha$ ,

根据根与系数的关系, 得  $\rho_1 \cdot \rho_2 = -3$ , (7分)

则  $|OA| \cdot |OB| = |\rho_1 \rho_2| = 3$ . (10分)

23. 解: (1)  $f(x) + f(x+4) = |x-1| + |x+3| \geq 8$ , (1分)

当  $x < -3$  时,  $1-x-x-3 \geq 8$ , 得  $x \leq -5$ ;

当  $-3 \leq x \leq 1$  时,  $1-x+x+3 \geq 8$ , 无解;

当  $x > 1$  时,  $x-1+x+3 \geq 8$ , 得  $x \geq 3$ . (4分)

综上, 不等式  $f(x) + f(x+4) \geq 8$  的解集为  $(-\infty, -5] \cup [3, +\infty)$ . (5分)

(2) 要证  $f(ab) > |a|f\left(\frac{b}{a}\right)$  成立, 即证  $|ab-1| > |b-a|$  成立, (6分)

即证  $a^2b^2 + 1 > a^2 + b^2$  成立, (7分)

则只需证  $a^2(b^2-1) - (b^2-1) > 0$  成立, (8分)

即证  $(a^2-1)(b^2-1) > 0$  成立. (9分)

由已知  $|a| < 1$ ,  $|b| < 1$ , 得  $(a^2-1)(b^2-1) > 0$  显然成立. (10分)

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线