2023 届广东省四校高三第一次联考

数学试题参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	C	A	B	C	A	D

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

9. BC　　10. BC　　11. AC　　12. BD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 1　　14. $-\frac{1}{4}$　　15. -1 或 3　　16. $\frac{4\sqrt{21}}{7}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分

17.（10分）

（1）当 $n=1$ 时，$a_1=S_1$, 所以 $S_1=2^1+3$, 即 $a_1=5$ ---------------------------------------1分

当 $n\geq 2$, $\because a_n=S_n-S_{n-1}=2^n+3-\left(2^{n-1}+3\right)=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$, -----------------------------3分

显然 $a_1=5$ 不符合上式，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}5 & n=1\\ 2^{n-1} & n\geq 2\end{cases}$ ---------------------5分

（2）因为在 a_k 与 a_{k+1} 之间插入 k 个1，所以 a_k 在 $\{b_n\}$ 中对应的项数为

$$n=k+1+2+\cdots+k-1=\frac{k(k+1)}{2}$$

当 $k=9$ 时，$\frac{9\times 10}{2}=45$，当 $k=10$ 时，$\frac{10\times 11}{2}=55$

所以 $a_9=b_{45}, a_{10}=b_{55}$，且 $b_{46}=b_{47}=\cdots=b_{50}=1$， --------------------------------------- 8分

$$T_{50}=a_1+a_2+\cdots+a_9+(1+2+\cdots+8)+5=5+2^1+\cdots+2^8+\frac{8\times 9}{2}+5$$

$$=46+\frac{2-2^9}{1-2}=556$$ --------------------------------------10分

18.（12 分）

解：（1）在三角形 ABD 中，由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{DB}{\sin\angle BAD}$,

在三角形 ACD 中，由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{DC}{\sin\angle CAD}$, --------------------------------------2 分

因为 $\angle ADB$ 与 $\angle ADC$ 互补，所以 $\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$，

由题意得 $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}$，所以 $\sin\angle CAD=\sin\angle BAD$，即 $\angle CAD=\angle BAD$，

所以 AD 平分 $\angle BAC$. 得证； --------------------------------5 分

（2）ΔABC 中，由余弦定理 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 得：$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a^2+8^2-7^2}{2\times 8a}$

解得$a=3$或$a=5$ --------------------------------------7 分

若$a=3$,则有：$a^2+c^2<b^2$,则 B 为钝角，不合题意，舍去； ---------------------------------8 分

若$a=5$,则有：$a^2+c^2>b^2$,则 B 为锐角，合题意，所以$a=5$

由（1）知：$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}=\frac{7}{8}$,所以$BD=\frac{7}{3}$，$DC=\frac{8}{3}$ --------------------------------------10 分

在ΔACD中，由余弦定理得：$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

解得：$\mathrm{AD}=\frac{8}{3}\sqrt{7}$

所以 $\mathrm{AD}=\frac{8}{3}\sqrt{7}$ --------------------------------------12 分

19.（12 分）

解：（1）常参加体育锻炼人员“睡眠足”的人数为：$(0.0425\times4+0.0625\times4+0.0625\times4+0.02\times4)\times100=75$，

则“睡眠不足”的人数为 25；

不常参加体育锻炼人员“睡眠足”的人数为：$(0.0725\times4+0.035\times4+0.015\times4+0.015\times4)=55$，

则“睡眠不足”的人数为 45；

列联表如下：

	睡眠足	睡眠不足	总计
常参加体育锻炼人员	75	25	100
不常参加体育锻炼人员	55	45	100
总计	130	70	200

---2 分

零假设H_0：睡眠足与常参加体育锻炼无关

因为$\chi^2=\frac{200\times(75\times45-55\times25)^2}{130\times100\times70\times100}\approx8.791>6.635$ -------------------------------------–4 分

根据小概率值$\alpha=0.01$的独立性检验，推断H_0不成立，所以认为“睡眠足”与“常参加体育锻炼”有关.

--------------------------------------5 分

（2）由题意知，常参加体育锻炼的样本人群中睡眠足和睡眠不足的人数比为 75:25=3:1，用分层抽样法抽取 8 人，其中睡眠足的有 6 人，睡眠不足的有 2 人---------------------------------6 分

从这 8 人随机抽取 2 人，则X的所有取值为 0，1，2.

$P(X=0)=\frac{C_6^0C_2^2}{C_8^2}=\frac{1}{28}$，$P(X=1)=\frac{C_6^1C_2^1}{C_8^2}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$，$P(X=2)=\frac{C_6^2C_2^0}{C_8^2}=\frac{15}{28}$；

所以分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{15}{28}$

--------------------------------------9 分（说明：全对给 3 分，不全对时求出两个概率给 2 分）

数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{28}+1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{15}{28}=\frac{3}{2}$ --------------------------------------10 分

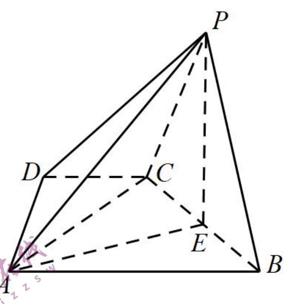
（3）由题意，该辖区常参加体育锻炼的人群中睡眠足的概率为$\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$,

由题意知：$Y\sim B(3,\frac{3}{4})$ --------------------------------------11 分

$D(Y)=3\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{16}$ --------------------------------------12 分

20.（12 分）

解：（1）取BC中点E，连接AE、PE，连接AC.



$\because \Delta PCB$为等边三角形，$\therefore PE\perp BC$， --------------------------------------1 分

$\because \angle ADC=90°$，$AD=\sqrt{3}$，$DC=1$

$\therefore AC=2$

又$\because AB//CD$ ，$\therefore \angle CAB=60°$，

又$\because AC=AB$ ，

$\therefore \Delta ACB$为等边三角形，

$\therefore BC=2$，$AE\perp BC$且$AE=\sqrt{3}$

$\therefore PE=\sqrt{3}$ --------------------------------------3 分

ΔPAE中$PA^2=PE^2+AE^2$

$\therefore \angle PEA=90°$，$PE\perp AE$，

又$AE\subset$面ABC，$BC\subset$面$ABCD$，且$AE\cap BC=E$

$\therefore PE\perp$面$ABCD$， --------------------------------------4 分

又$PE\subset$面PCB，

$\therefore$面$PCB\perp$面$ABCD$. --------------------------------------5 分

（2）由（1），以点E为坐标原点，建系如图，则$E(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,-1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$D(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0)$，

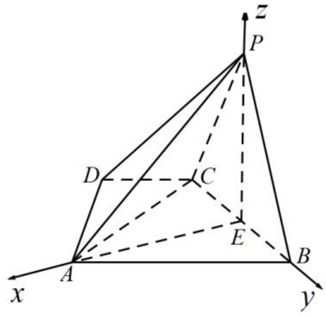
则$\overrightarrow{PD}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},-\sqrt{3})$ --------------------------------------6 分

假设存在点Q，使得二面角$A-BC-Q$的大小为$\frac{\pi}{4}$，则设

$\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PD}=(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,-\frac{3}{2}\lambda,-\sqrt{3}\lambda)$，$\lambda\in[0,1]$，　-------------------------7 分

则$Q(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,-\frac{3}{2}\lambda,\sqrt{3}(1-\lambda))$，

显然面 ABC 的一个法向量为$\overrightarrow{n_1}=(0,0,1)$，--------------------------------8 分



又$\because$ $\overrightarrow{CB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{CQ}=(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,1-\frac{3}{2}\lambda,\sqrt{3}(1-\lambda))$，

设面 BCQ 的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$，

即$\begin{cases}y=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda x+(1-\frac{3}{2}\lambda)y+\sqrt{3}(1-\lambda)z=0\end{cases}$

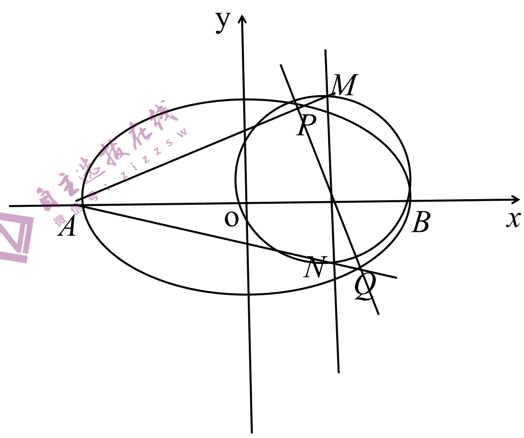
解得 $\overrightarrow{n_2}=(2-\frac{2}{\lambda},0,1)$ ，---10 分

由题 $|\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\sqrt{2}}{2}|$，$\therefore\frac{1}{\sqrt{(2-\frac{2}{\lambda})^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

解得$\lambda=\frac{2}{3}$ 或者$\lambda=2$（舍）　　　　---11 分

则$\frac{PQ}{PD}=\frac{2}{3}$.　　　　　　　　　　　---12 分

21.（12 分）



(1)由已知可得MN为圆G的直径，则$k_{OM}\cdot k_{ON}=-1$

记$M(1,m),N(1,n)$，则$mn=-1$

$k_{AM}\cdot k_{AN}=\frac{m}{3}\cdot\frac{n}{3}=-\frac{1}{9}$　---------------4 分

(2)$k_{AM}\cdot k_{AN}=k_{AP}\cdot k_{AQ}=-\frac{1}{9}$ ----------5 分

由已知直线 PQ 存在斜率，记其方程为 $y=kx+m$

代入 $x^2+4y^2=4$ 有 $(1+4k^2)x^2+8kmx+(4m^2-4)=0$

记 P（x_1,y_1），$Q(x_2,y_2)$，则当$\Delta>0$时有 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2},x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$ -------------7 分

$\because k_{AP}\cdot k_{AQ}=\frac{y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=-\frac{1}{9}$

$\therefore 9y_1y_2+x_1x_2+2(x_1+x_2)+4=0$　　　(1)

$y_1y_2=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\frac{m^2-4k^2}{1+4k^2}$，代入（1）式化简有

$13m^2-16km-20k^2=0$，　$(13m+10k)(m-2k)=0$

当 $m=-\frac{10}{13}k$，$l:y=k(x-\frac{10}{13})$，过定点（$\frac{10}{13}$，0）

当 $m=2k$ 时，$l:y=k(x+2)$，过定点 A（－2，0），舍去------------------------11 分

综上有，直线l过定点（$\frac{10}{13}$，0）--12 分

22.（12 分)

解：$f^{'}(x)=e^x-a$

(1)当$a\le 0$时，$f^{'}(x)\ge 0$，$f(x)$在 R 上单调递增 --------------------------1 分

当 a > 0 时，由$f^{'}(x)=e^x-a=0$，$x=\ln a$

当$x<\ln a$ 时，$f^{'}(x)<0$，$f(x)$在（$-\infty$，$\ln a$）上单调递减

当$x>\ln a$ 时，$f^{'}(x)>0$，$f(x)$在（$\ln a$，$+\infty$）上单调递增 ----------------------------3 分

综上有：当$a\le 0$时，$f(x)$在 R 上单调递增；

当 a > 0 时，$f(x)$在（$-\infty$，$\ln a$）上单调递减，$f(x)$在（$\ln a$，$+\infty$）上单调递增.----4 分

（2）由已知$f(x)=e^x-ex$,

因为对于$\forall x\in(0,+\infty)$，$e^x-ex\ge t(x^2-x-x\ln x)$

所以$\frac{e^x}{x}-e\ge t(x-1-\ln x)$

$e^{x-\ln x}-e\ge t(x-1-\ln x)$

设$m=x-\ln x\in[1,+\infty)$,则$e^m-e\ge t(m-1),m\in[1,+\infty)$ ---------------------7 分

$e^m-tm\_+t-e\ge 0,m\in[1,+\infty)$

记$\varphi(x)=e^x-tx+t-e,\ x\in[1,+\infty)$

$\varphi^{'}(x)=e^x-t$

当$t\le e$时，$\varphi^{'}(x)\ge 0$，$\varphi(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增; $\varphi(x)\ge\varphi(1)=0$ 恒成立.---------9 分

当$t>e$时，$\varphi^{'}(x)=0$，$x=\ln t\in(1,+\infty)$,

$\varphi(x)$在$(1,\ln t)$上单调递减，则$\varphi(\ln t)<\varphi(1)=0$ 与$\varphi(x)\ge 0$ 矛盾；---------------11 分

综上，当$t\le e$时，$x\in[1,+\infty)$$\varphi(x)\ge 0$ 恒成立，即$e^x-ex\ge t(x^2-x-x\ln x)$恒成立.

--12 分