大联考长沙市一中 2024 届高三月考试卷(三)

数学参考答案

一、选择题(本大题共 8 个小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8
答 案	D	C	A	B	B	A	D	C

1. D 【解析】因为 $z=\frac{1-i}{2+i}=\frac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$,对应点为$\left(\frac{1}{5},-\frac{3}{5}\right)$,在第四象限.故选 D.

2. C 【解析】因为$\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^6$展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r\cdot(x^{\frac{1}{3}})^r=C_6^r\cdot x^{\frac{r}{3}}, r=0,1,\cdots,6$,当 $r=0,3,6$,T_1,T_4,T_7 为有理项,故选 C.

3. A 【解析】根据 $f'(x)$的图象判断出 $f(x)$的单调性、极值点、最值,对选项进行分析,从而确定正确答案 A.

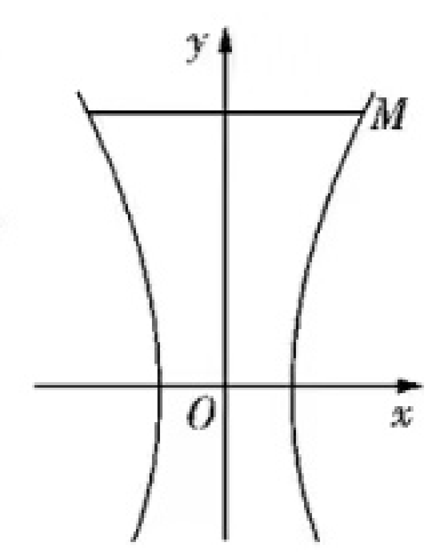
4. B 【解析】由题意知 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减,又因为 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数,所以 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,由 $f(1)=-1$ 可得 $f(-1)=-f(1)=1$,故$|f(x-1)|\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant f(x-1)\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant x-1\leqslant 1$,所以 $0\leqslant x\leqslant 2$,故选 B.

5. B 【解析】充分性:当 $a_1=\frac{1}{2}, q=2$ 时,则 $a_2=a_1q=1$, $T_2=a_1a_2=T_1$,故充分性不成立;

必要性:若$\{T_n\}$为递增数列,则$\frac{T_n}{T_{n-1}}=a_n=a_1\cdot q^{n-1}>1(n\geqslant 2)$,则 $a_1>0, q>0$,①当 $0<a_1\leqslant 1, 0<q<1$ 时,则 $0<q^{n-1}<1$,则 $a_1\cdot q^{n-1}<1$ 恒成立,②当 $0<a_1\leqslant 1, q>1$ 时,则 $q^{n-1}>1$,则 $a_1\cdot q^{n-1}<1$ 可能成立,③当 $a_1>1$, $0<q<1$ 时,则 $0<q^{n-1}<1$,则 $a_1\cdot q^{n-1}<1$ 可能成立,④当 $a_1>1, q>1$ 时,则 $q^{n-1}>1$,则 $a_1\cdot q^{n-1}>1$ 恒成立,故必要性成立.

∴“$a_1>0$ 且 $q>1$”是“$\{T_n\}$为递增数列”的必要不充分条件.故选 B.

6. A 【解析】因为该花瓶横截面圆的最小直径为 8 cm,所以 $a=4$.设 M 是双曲线 C 与瓶口截面的一个交点,该花瓶的瓶口半径为 r,则 $M(r,b)$,所以$\frac{r^2}{4^2}-\frac{b^2}{b^2}=1$,解得 $r=4\sqrt{2}$,故该花瓶的瓶口直径为 $2r=8\sqrt{2}$ cm.故选 A.



7. D 【解析】由 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=0$,可得 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=0$,即$\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=-1$,故$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=-1$.又 $\sin\alpha\sin\beta-3\cos\alpha\cos\beta=0$,故 $\sin\alpha\sin\beta=3\cos\alpha\cos\beta$,即 $\tan\alpha\tan\beta=3$,代入$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=-1$ 可得 $\tan\alpha+\tan\beta=-4$.故 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=2$.故选 D.

8. C 【解析】将数列分组为$\left(\frac{1}{1}\right),\left(\frac{2}{1},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4}\right),\cdots$,设满足 $n\geqslant 20$ 的 $a_n=5$ 首次出现在第 m 组的第 x 个数的位置上,则$\frac{m+1-x}{x}=5$,化简得 $x=\frac{m+1}{6}$,$x,m\in\mathbf{N}$,此时数列共有项数为 $1+2+3+\cdots+(m-1)+x=\frac{(m-1)m}{2}+x\geqslant 20$,即得$\frac{(m-1)m}{2}+\frac{m+1}{6}\geqslant 20$,解得 $m\geqslant\frac{1+\sqrt{358}}{3}$由于 $m\in\mathbf{N}$,而$\frac{19}{3}\leqslant\frac{1+\sqrt{358}}{3}\leqslant\frac{20}{3}$,故 $m\geqslant 7$,又 $x=\frac{m+1}{6}\in\mathbf{N}$,故符合条件的 m 的最小值为 11,此时 $x=2$,则满足 $a_n=5$ 且 $n\geqslant 20$ 的 n 的最小值为$\frac{(m-1)m}{2}+x=\frac{(11-1)\times 11}{2}+2=57$,故选 C.

二、选择题(本大题共 4 个小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项是符合题目要求,全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 2 分)

题 号	9	10	11	12
答 案	BCD	BCD	ABD	ACD

9. BCD 【解析】由饼状图可知，A 县建档立卡人员年人均收入提升的均值为 $123\times\frac{7}{12}+121\times\frac{1}{4}+114\times\frac{1}{6}=121$，故 A 错误；由条形图可知，$B$ 县建档立卡人员年人均收入提升的均值为 $115\times0.1+117\times0.2+119\times0.5+123\times0.2=119$，其方差为 $(115-119)^2\times0.1+(117-119)^2\times0.2+(119-119)^2\times0.5+(123-119)^2\times0.2=5.6$，故 B 正确；因为均值 C 县最大，所以 C 县的精准扶贫效果最好，故 C 正确；C 县建档立卡人员年人均收入提升的均值为 122(百元)，方差为 4，A,B,C 三县建档立卡人员比例为 $3:4:5$，估计本地区建档立卡人员年人均收入提升 $121\times\frac{1}{4}+119\times\frac{1}{3}+122\times\frac{5}{12}=120.75$(百元)，故 D 正确. 故选 BCD.

10. BCD 【解析】易知 PD' 与 MN 为异面直线，所以D',P,M,N 不可能四点共面，故 A 错误；由 $PN/\!/AC$，而 $AC\perp BD$，所以 $PN\perp BD$，故 B 正确；由 $PD'/\!/BN$，$BN\subset$平面 BNM，$PD'\not\subset$平面 BNM，所以 $PD'/\!/$平面 BNM，故 C 正确；$V_{D'\text{-}BMN}=V_{B\text{-}D'MN}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times2=\frac{1}{3}$，故 D 正确. 故选 BCD.

11. ABD 【解析】对于选项 A，由题意可得，圆 O 的圆心为 $O(0,0)$，半径 $r_1=2$，圆 C 的圆心 $C(3,3)$，半径 $r_2=2$，因为两圆圆心距 $|OC|=3\sqrt{2}>2+2=r_1+r_2$，所以两圆外离，有四条公切线，A 正确；对于 B 选项，$|PQ|$ 的最大值等于 $|OC|+r_1+r_2=3\sqrt{2}+4$，最小值为 $|OC|-r_1-r_2=3\sqrt{2}-4$，B 正确；对于 C 选项，显然直线 $x-y=2$ 与直线 OC 平行，因为两圆的半径相等，则外公切线与圆心连线平行，由直线 OC：$y=x$，设直线为 $y=x+t$，则两平行线间的距离为 2，即$\frac{|t|}{\sqrt{2}}=2$，故 $y=x\pm2\sqrt{2}$，故 C 不正确；对于 D 选项，易知当$\angle MQN=90^\circ$时，四边形 $OMQN$ 为正方形，故当 $|QO|=2\sqrt{2}$ 时，$\angle MQN=90^\circ$，故 D 正确，故选：ABD.

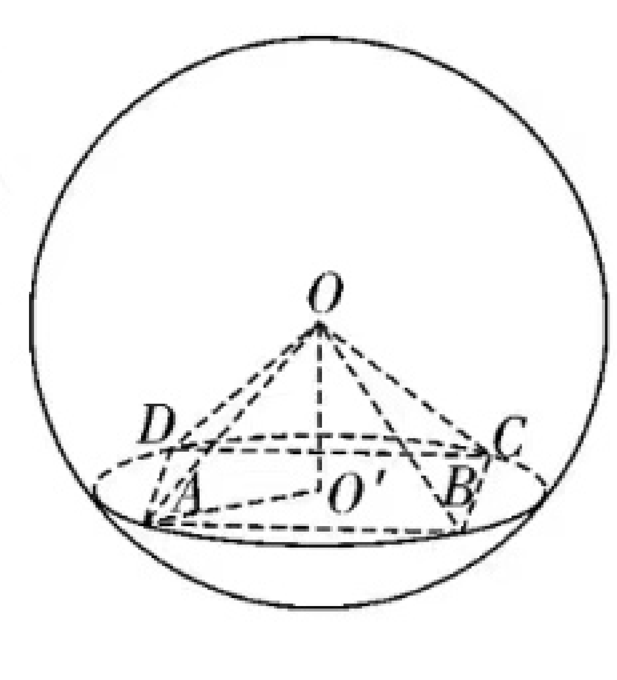
12. ACD 【解析】设直线 l 与曲线 $y=f(x)$、曲线 $y=g(x)$分别相切于点 $A(x_1,\ln x_1)$和点 $B(x_2,x_2^a)$，所以 l 的方程可表示为 $y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$或 $y-x_2^a=ax_2^{a-1}(x-x_2)$，则有$\frac{1}{x_1}=ax_2^{a-1}$，$\ln x_1-1=(1-a)x_2^a$，且 $a>0$，消去 x_1 有$(a-1)\ln x_2+(1-a)x_2^a+\ln a+1=0$，即$(a-1)(\ln x_2-x_2^a)+\ln a+1=0$，令 $h(x)=(a-1)(\ln x-x^a)+\ln a+1$，则 $h(x)$在$(0,+\infty)$上有零点，令 $m(x)=\ln x-x^a$，则 $m(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{a^{\frac{1}{a}}}\right)$上单调递增，在区间$\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{a}}},+\infty\right)$上单调递减. 当 $a>1$ 时，$h(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{a^{\frac{1}{a}}}\right)$上单调递增，在区间$\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{a}}},+\infty\right)$上单调递减. $h\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{a}}}\right)=(a-1)\left(\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\right)+\ln a+1=\frac{1}{a}(1+\ln a)>0$，当 $a\to+\infty$时，$h(x)\to-\infty$，故 $h(x)$在$(0,+\infty)$上恒有零点，从而 $a>1$ 恒成立；当 $a=1$ 时，$h(x)=1$，无零点，不成立；当 $a<1$ 时，$h(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{a^{\frac{1}{a}}}\right)$上单调递减，在区间$\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{a}}},+\infty\right)$上单调递增. 令 $h\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{a}}}\right)=(a-1)\left(\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\right)+\ln a+1=\frac{1}{a}(1+\ln a)\leqslant0$，从而有 $0<a\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$. 综上，实数 a 的取值范围是$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]\cup(1,+\infty)$. 故选 ACD.

另解：可以从图象的角度分凹凸性相同和相异两种情况进行分类讨论. 当 $a>1$ 时，幂函数和对数函数的凹凸性相反，相离即有公切线；当 $a<1$ 时，幂函数和对数函数有公共点，才会有公切线，从而确定 a 的范围.

三、填空题(本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分)

13. (1,1) 【解析】由 $\boldsymbol{b}=(1,1)$，得 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，又 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1+0\times1=2$，所以向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的坐标为$\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right)\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{b}=(1,1)$.

14. 32 【解析】设球 O 的半径为 R，则 $S_{球}=4\pi R^2=100\pi$，解得 $R=5$，由题意可知 $OA=OB=OC=OD=R=5$，所以四棱锥 $O-ABCD$ 为正四棱锥，设顶点 O 在底面 $ABCD$ 的射影点为O'，则O'为正方形 $ABCD$ 的中心，$AO'=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times8=4$，则 $OO'\perp$平面 $ABCD$，所以 $OO'=\sqrt{AO^2-AO'^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，四棱锥 $O\text{-}ABCD$ 的体积为 $V_{O\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot OO'=\frac{1}{3}\times(4\sqrt{2})^2\times3=32$.



15. $-\sqrt{3}$ 【解析】将函数 $f(x)=a\sin x+b\cos x(a,b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq0)$ 的图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍，得到函数 $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)=a\sin\frac{1}{2}x+b\cos\frac{1}{2}x(a,b\in\mathbf{R})$ 的图象，再将所得图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后，得到函数 $h(x)=g\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=a\sin\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+b\cos\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)(a,b\in\mathbf{R})$，因为 $h(x)$ 为奇函数，图象关于原点对称，所以有 $h(0)=a\sin\frac{\pi}{6}+b\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b=0$，解得 $\frac{a}{b}=-\sqrt{3}$.

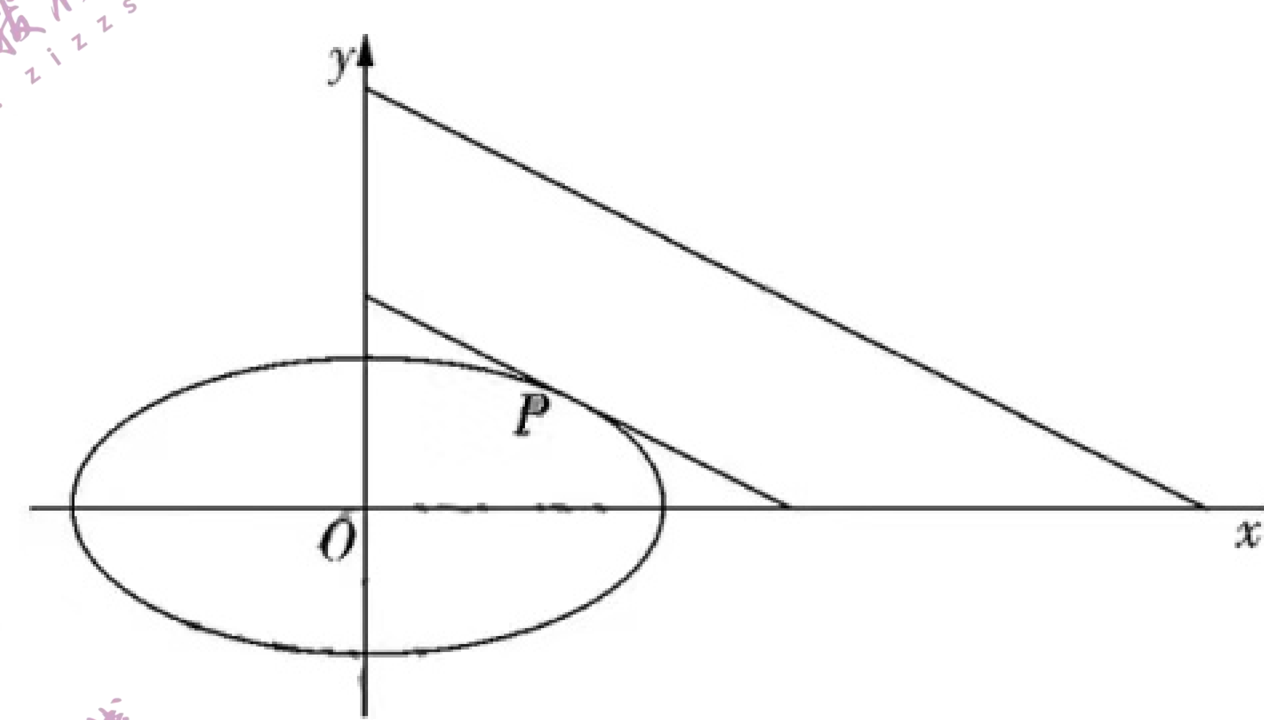
16. $\sqrt{5}$ 【解析】如图可知：$C(0,2),C'(0,-2),M(3t,0),N(3,2-2t)$.

当 $t=0$ 时，则交点为 C；当 $t=1$ 时，则交点为 A.

当 $0<t<1$ 时，则 $k_{C'M}=\frac{2}{3t},k_{CN}=-\frac{2t}{3}$，于是可得 $l_{C'M}:y=\frac{2}{3t}x-2,l_{CN}:y=-\frac{2t}{3}x+2$. 联立上式可得点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1(x>0,y>0)$.

又点 A,C 满足方程 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，故点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1(x\geqslant0,y\geqslant0)$.

法一：设 $\begin{cases}x=3\cos\theta,\\y=2\sin\theta,\end{cases}\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $d=\frac{|3\cos\theta+4\sin\theta-10|}{\sqrt{5}}=\frac{|5\sin(\theta+\varphi)-10|}{\sqrt{5}}$，$\tan\varphi=\frac{3}{4}$，当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时，距离最小，最小为 $d=\frac{|5-10|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.



法二：点 P 的轨迹方程为：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1(x\geqslant0,y\geqslant0)$，与 $x+2y-10=0$ 无公共点.

设直线 m 平行于直线 $x+2y-10=0$，则直线 m 的方程可以写为 $x+2y-n=0$，

由方程组 $\begin{cases}x+2y-n=0,\\\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 消去 x，得 $25y^2-16ny+4n^2-36=0$.

令其根的判别式 $\Delta=0$，得 $n=\pm5$.

由图知，当 $n=5$ 时，直线 $x+2y-5=0$ 与 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1(x\geqslant0,y\geqslant0)$ 的公共点到直线 $x+2y-10=0$ 的距离最小，最小距离为 $d=\frac{|5-10|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

四、解答题（本大题共 6 个小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.【解析】(1) 由题意：$\frac{a_{n+1}+n+1}{a_n+n}=\frac{2a_n+n-1+n+1}{a_n+n}=\frac{2a_n+2n}{a_n+n}=2$，…………………………… 2 分

故数列 $\{a_n+n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，则 $a_n=2\times2^{n-1}-n=2^n-n$. ………………… 3 分

(2) $b_n=\frac{2n-1}{a_n+n}=\frac{2n-1}{2^n}$，…………………………………………………………………… 4 分

$S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\frac{1}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$①，…………………………………… 5 分

两边同乘 $\frac{1}{2}$ 得：$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$②，…………………………… 6 分

作差得 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$，…………………………………………… 7 分

$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2^{n+1}}$，…………………………………………… 9 分

$S_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$. ………………………………………………………………………………… 10 分

18.【解析】(1) 因为 $b^2-a^2=ac$，由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，所以 $ac=c^2-2ac\cos B$，

$a=c-2a\cos B$，………………………………………………………………………………………… 2分

由正弦定理得 $\sin A=\sin C-2\sin A\cos B=\sin(A+B)-2\sin A\cos B=\sin A\cos B+\cos A\sin B-2\sin A\cos B$ $=\cos A\sin B-\sin A\cos B=\sin(B-A)$，…………………………………………………… 4 分

因为△ABC 为锐角三角形，所以 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$B-A\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $A=B-A$，即 $B=2A$. …………………………………………………… 6 分

(2)$B=2A$，$C=\pi-3A$，

由 $A,B,C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，得 $A\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$，…………………………………………………… 8 分

$$\frac{l}{a}=\frac{a+b+c}{a}=\frac{\sin 3A+\sin 2A}{\sin A}+1=\frac{\sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A+2\sin A\cos A}{\sin A}+1$$

$$=\frac{2\sin A\cos^2 A+\cos 2A\sin A+2\sin A\cos A}{\sin A}+1=4\cos^2 A+2\cos A，$$ …………………………………………………… 10 分

$A\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$，$\cos A\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，结合二次函数单调性易知 $2+\sqrt{2}<4\cos^2 A+2\cos A<3+\sqrt{3}$，…………… 11 分

即 $\frac{l}{a}$ 的取值范围为 $(2+\sqrt{2},3+\sqrt{3})$. …………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)X 的所有可能取值为 0，1，2，3. 参加"单板滑雪"人数在 45 人以上的学校共 4 所.

所以 $P(X=0)=\frac{C_4^0C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$，…………………………………………………… 2 分

$P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$，…………………………………………………… 3 分

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$，…………………………………………………… 4 分

$P(X=3)=\frac{C_4^3C_6^0}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$. …………………………………………………… 5 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

…………………………………………………… 7 分

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$. …………………………………………………… 8 分

(2)小明同学在一轮测试中为"优秀"的概率为 $p=C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}+C_3^3\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{7}{27}$，…………………………… 9 分

小明在 n 次测试中获"优秀"次数 ξ 满足 $\xi\sim B(n,p)$，由 $np\geqslant 5\Rightarrow n\geqslant\frac{135}{7}\approx 19.286$，……………………… 11 分

所以理论上至少要进行 20 次测试. …………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)由题意知 $AC\perp BC$，又因为四边形 BCC_1B_1 为矩形，得 $CC_1\perp BC$，

且 $CC_1\cap AC=C$，$AC\subset$平面 ACC_1A_1，$CC_1\subset$平面 ACC_1A_1，

所以 $BC\perp$平面 ACC_1A_1，

又 $CP\subset$平面 ACC_1A_1，所以 $BC\perp CP$. …………………………………………………… 2 分

因为 $AA_1=2AC$，点 P 为 AA_1 的中点，所以 $AC=AP$，所以 $\angle APC=\frac{\pi}{4}$，

同理 $\angle A_1PC_1=\frac{\pi}{4}$，所以 $\angle CPC_1=\frac{\pi}{2}$，即 $PC_1\perp CP$. …………………………………………………… 3 分

又由于 $BC/\!/B_1C_1$，所以 $B_1C_1\perp CP$，且 $PC_1\cap B_1C_1=C_1$，

又 $PC_1\subset$平面 PB_1C_1，$B_1C_1\subset$平面 PB_1C_1，

所以 $CP\perp$平面 PB_1C_1，…………………………………………………… 4 分

又因为 $CP\subset$平面 PB_1C，所以平面 $PB_1C_1\perp$平面 PB_1C. …………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知，$BC\perp$平面 ACC_1A_1，又 $BC/\!/B_1C_1$，故 $B_1C_1\perp$平面 ACC_1A_1，

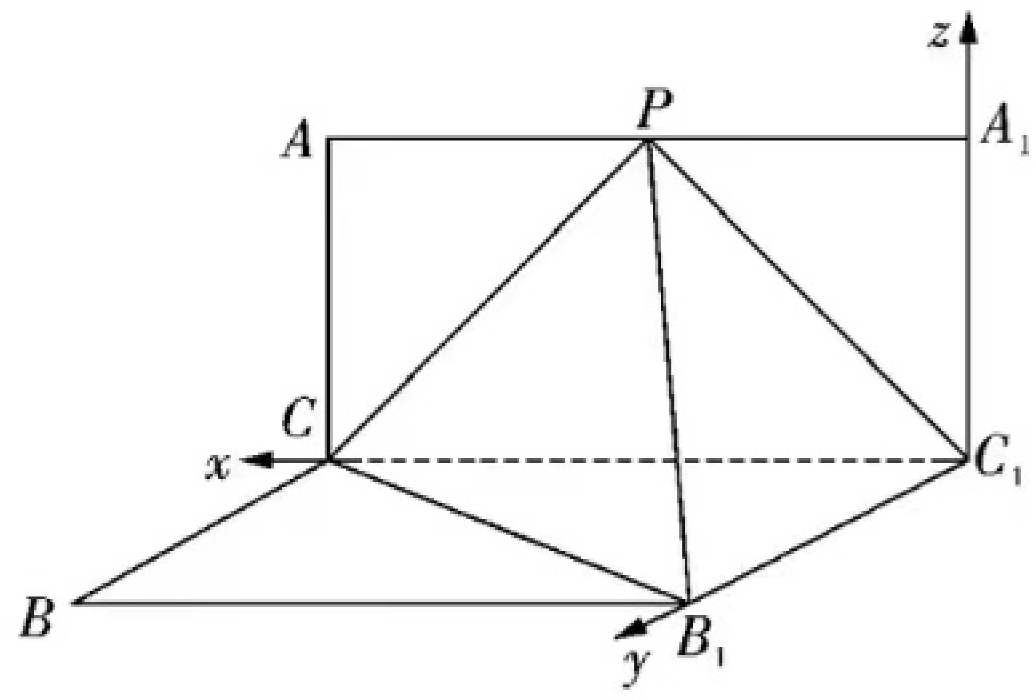
所以 C_1P 是直线 B_1P 在平面 ACC_1A_1 内的射影，

所以$\angle B_1PC_1$就是直线B_1P与平面ACC_1A_1所成的角，即$\tan\angle B_1PC_1=\frac{3}{5}$，…………………………… 6分

即$\frac{B_1C_1}{PC_1}=\frac{3}{5}$，设$AA_1=2$，则$A_1C_1=B_1C_1=1$，$PC_1=\frac{5}{3}$，$PA_1=\sqrt{PC_1^2-A_1C_1^2}=\frac{4}{3}$. …………………… 7分

又由(1)知，A_1C_1，B_1C_1，CC_1两两垂直，

以C_1为原点，C_1C，C_1B_1，C_1A_1所在直线分别为x，y，z轴建立空间直角坐标系.



则$C(2,0,0)$，$B_1(0,1,0)$，$P\left(\frac{4}{3},0,1\right)$，$C_1(0,0,0)$，

$\overrightarrow{B_1C}=(2,-1,0)$，$\overrightarrow{B_1P}=\left(\frac{4}{3},-1,1\right)$， …………………………… 8分

设平面PB_1C的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

由于$\begin{cases}\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{B_1C},\\ \boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{B_1P},\end{cases}$所以$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1C}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1P}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x-y=0,\\ \frac{4}{3}x-y+z=0,\end{cases}$

令$x=3$，则$y=6$，$z=2$，即$\boldsymbol{m}=(3,6,2)$，

设平面PB_1C_1的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，…………………………………………………… 9分

$\overrightarrow{C_1P}=\left(\frac{4}{3},0,1\right)$，$\overrightarrow{C_1B_1}=(0,1,0)$，

由于$\begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{C_1B_1},\\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{C_1P},\end{cases}$所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1P}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}b=0,\\ \frac{4}{3}a+c=0,\end{cases}$

令$a=3$，则$b=0$，$c=-4$，即$\boldsymbol{n}=(3,0,-4)$，…………………………………………………… 10分

设平面CPB_1与平面PB_1C_1的夹角为θ，可知θ为锐角，

所以$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{1}{35}$. …………………………………… 11分

故平面CPB_1与平面PB_1C_1夹角的余弦值为$\frac{1}{35}$. ………………………………………………… 12分

21.【解析】(1)C_1的焦点为$F(0,1)$，所以$a^2=b^2+1$，①

又C_1与C_2的公共弦长为$2\sqrt{6}$，且C_1与C_2都关于y轴对称，所以公共点的横坐标为$\pm\sqrt{6}$，

代入$x^2=4y$可得纵坐标为$\frac{3}{2}$，所以公共点的坐标为$\left(\pm\sqrt{6},\frac{3}{2}\right)$，

代入$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$中可得$\frac{9}{4a^2}+\frac{6}{b^2}=1$，②

联立①②得$a^2=9$，$b^2=8$，故C_2的方程为$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{8}=1$. …………………………………… 4分

(2)设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

(i)设直线l的方程为$y=kx+1$，联立$\begin{cases}y=kx+1,\\ x^2=4y,\end{cases}$得$x^2-4kx-4=0$，

则$\Delta=16(k^2+1)>0$，$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+1)(kx_2+1)=(k^2+1)x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=-3<0$，

所以$\angle AOB>\frac{\pi}{2}$，$\triangle AOB$为钝角三角形. ……………………………………………………… 7分

(ii)因为$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$同向，且$|AC|=|BD|$，所以$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$，

从而$x_3-x_1=x_4-x_2$，即$x_1-x_2=x_3-x_4$，所以$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(x_3+x_4)^2-4x_3x_4$，

联立$\begin{cases}y=kx+1,\\ \frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{8}=1,\end{cases}$得$(8k^2+9)x^2+16kx-64=0$，$\Delta=16^2k^2+4\cdot64(8k^2+9)>0$，

则$x_3+x_4=-\frac{16k}{8k^2+9}$，$x_3x_4=\frac{-64}{8k^2+9}$，

所以$16(k^2+1)=\left(-\frac{16k}{8k^2+9}\right)^2-4\times\frac{-64}{8k^2+9}$，即$k=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$，

所以直线l的斜率为$\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$. ……………………………………………………………… 12分

22.【解析】(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=e^x+\cos x-\sin x$，$f'(x)=e^x-\sin x-\cos x$.

令 $h(x)=e^x-\sin x-\cos x$，则当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 时，$e^x\geqslant e^{\frac{\pi}{2}}>2$，$\sin x+\cos x<2$，

从而 $h(x)=e^x-\sin x-\cos x>0$ 成立；

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$h'(x)=e^x-\cos x+\sin x=e^x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，

此时有 $e^x\geqslant 1$，$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in[-1,1)$，从而 $h'(x)\geqslant 0$，$h(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，$h(x)\geqslant h(0)=0$，

故当 $a=0$，$x\geqslant 0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………… 5 分

(2)法一：(分离参数法)$e^{x+a}+\cos x-\sin x\geqslant 0$，则 $e^a\geqslant\frac{\sin x-\cos x}{e^x}$.

令 $\varphi(x)=\frac{\sin x-\cos x}{e^x}$，$x\in(0,+\infty)$，则 $\varphi'(x)=\frac{2\cos x}{e^x}$，$x\in(0,+\infty)$.

故 $\varphi(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\frac{5}{2}\pi+2k\pi\right)$ 上单调递增，其中 $k\in\mathbf{N}$，又 $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\geqslant\varphi\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$，故 $e^a\geqslant\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$.

故实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{\pi}{2},+\infty\right)$. …………………………………………………………… 12 分

法二：由 $f(x)\geqslant 0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，得 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\geqslant 0$，即 $e^{\frac{\pi}{2}+a}-1\geqslant 0$，亦即 $a\geqslant-\frac{\pi}{2}$.

下面证明：当 $a\geqslant-\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

当 $a\geqslant-\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=e^{x+a}+\cos x-\sin x\geqslant e^{x-\frac{\pi}{2}}+\cos x-\sin x$，

令 $g(x)=e^{x-\frac{\pi}{2}}+\cos x-\sin x$，则 $g'(x)=e^{x-\frac{\pi}{2}}-\sin x-\cos x=e^{x-\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$e^{x-\frac{\pi}{2}}<1$，$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>1$，所以 $g'(x)<0$，

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$e^{x-\frac{\pi}{2}}>1$，$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<1$，所以 $g'(x)>0$，

当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时，$e^{x-\frac{\pi}{2}}>e^{\frac{\pi}{2}}>2$，$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<2$，所以 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，在 $x\in\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

故当 $a\geqslant-\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)\geqslant g(x)\geqslant g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

综上：实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{\pi}{2},+\infty\right)$. ………………………………………………………… 12 分