2023年高三年模拟（一）答案

一、选择题

1. C　2. D　3. C　4. B　5. D　6. C　7. A　8. B

7．解析：令 $f(t)=\frac{\ln t}{t}$，则 $f'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$，$t\in(0,e)$ 时，$f'(t)>0, f(t)$ 单调递增；

$t\in(e,+\infty), f'(t)<0, f(t)$ 单调递减，$\therefore a=\frac{\ln t}{t}\le f(e)\le\frac{1}{e}$，容易发现 $\frac{1}{e}<\frac{2}{5}$，即 $a<b$，

又 $(\frac{3}{2})^5=\frac{243}{32}\approx 7.59>e^2$，$\therefore \frac{2}{5}>\ln\frac{3}{2}$，即 $b<c$，故 $a<b<c$.

8．解析：令 $P(x_0,y_0)$，$\because$ 四边形 $OFPQ$ 为平行四边形，$\therefore Q(-x_0,y_0)$，

又直线 l 的倾斜角为 120°，则 $\begin{cases}\frac{y_0}{x_0}=\sqrt{3}\\ \frac{y_0}{x_0-c}=-\sqrt{3}\end{cases}$，解得，$x_0=\frac{c}{2}$，

故 $|OP|=|PF|$，又 $\angle PFO=60^0$，$\therefore \Delta OPF$ 为等边三角形，

设椭圆的左焦点为 F_1，连接 PF_1，则 ΔPF_1F 为直角三角形，有 $\angle PFO=60^0$，

故 $|PF_1|=\sqrt{3}c, |PF|=c$，又 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}-1$.

二、选择题

9．BC　10．AD　11．ABD　12．ACD

11．解析：圆心 $C(1,2)$，C 到 l 的距离为 $2\sqrt{2}$，令 $M(x_0,y_0)$，则 $y_0=-x_0-1$，

设切线长为 l，$l=\sqrt{|MC|^2-2}\ge\sqrt{6}$，故 A 正确；

$S_{\text{四边形}MACB}=2S_{\Delta MAC}\ge 2\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{3}$，故 B 正确；

$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MC}^2-\overrightarrow{CP}^2=\overrightarrow{MC}^2-2\ge 6$，故 C 不正确；

切点弦 AB 的方程为 $(x_0-1)(x-1)+(y_0-2)(y-2)=2$，将 $y_0=-x_0-1$ 代入，整理得

$x_0(x-y+1)-(x+3y-5)=0$，$\therefore \begin{cases}x-y+1=0\\ x+2y-5=0\end{cases}$，直线 AB 恒过 $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$，故 D 正确；

所以答案为 ABD.

12．解析：

$\because x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$u=2\sin x$ 与 $v=\sin 2x$ 均为增函数，$\therefore f(x)$ 也为增函数，故 A 正确；

$\because f(x+\pi)=2\sin(x+\pi)+\sin 2(x+\pi)=-2\sin x+\sin 2x\ne f(x)$，故 B 不正确；

易证 $f(x)$ 是以 2π 为周期的奇函数，

又 $f'(x)=2\cos x+2\cos 2x=2(2\cos^2 x+\cos x-1)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$，

当 $2k\pi-\dfrac{\pi}{3}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{3}$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $2k\pi+\dfrac{\pi}{3}<x<2k\pi+\dfrac{5\pi}{3}$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(2k\pi+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$\therefore f(x)_{\min}=f(2k\pi-\dfrac{\pi}{3})=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，故 CD 均正确，

所以答案为 ACD.

三、填空题

13．3　14．4　15．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$；$\dfrac{32\pi}{3}$（第一空 2 分，第二空 3 分）　16．$2+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

15．解析：AB 与平面 BCD 所成角即为 $\angle ABE$，由三余弦公式，

得 $\cos\angle ABC=\cos\angle ABE\cos\angle EBC$，又 $\angle ABC=60^\circ$，$\angle EBC=30^\circ$，

$\therefore \cos\angle ABE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即 $\sin\angle ABE=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

又 $BE=\sqrt{3}, S_{\Delta ABE}=2\sqrt{2}$，解得 $AB=4$，

又 $\angle ABC=\angle ABD=60^\circ$，$BC=BD=2$，

$\therefore \angle ADB=ACB=90^\circ$，$\therefore AB$ 为外接球直径，$\therefore$ 三棱锥外接球的体积为 $\dfrac{32\pi}{3}$.

16．解析：$2x^2+y^2=\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2+xy}=\frac{2+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}}$，令 $\frac{y}{x}=t$，

原式 $=\frac{2+t^2}{1+t+t^2}=1-\frac{t-1}{t^2+t+1}=1-\frac{t-1}{(t-1)^2+3(t-1)+3}=1-\frac{1}{(t-1)+\frac{3}{t-1}+3}$，

由于 $(t-1)+\frac{3}{t-1}\in(-\infty,-2\sqrt{3}]\cup[2\sqrt{3},+\infty)$，

当其取 $-2\sqrt{3}$ 时，原式取得最大值 $2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

令解：$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2=1$，令 $\begin{cases}x+\frac{y}{2}=\cos\theta\\ \frac{\sqrt{3}}{2}y=\sin\theta\end{cases}$，可解得 $\begin{cases}x=\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\\ y=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\end{cases}$，

$2x^2+y^2=2-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin 2\theta\le 2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

四、解答题

17. 解析：(1) 由题意可知，$a_n=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(n-1)^2+(4n-1)=n^2+2n$，…………1 分

因此$b_n=a_{n+1}-a_n=\left[(n+1)^2+2(n+1)\right]-(n^2+2n)=2n+3$，…………………3 分

$\therefore b_{n+1}-b_n=(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=[2(n+1)+3]-(2n+3)=2$为常数，………5 分

$\therefore$数列$\{b_n\}$是等差数列. ………………………………………6 分

(2) 由 (1) 知$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{n^2+2n}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$，…………………8 分

$\therefore \dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)<\dfrac{3}{4}$.

……………………………………10 分

18. 解：(1)由题设$\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$，知$\tan A=-\sqrt{3}$，…………………1 分

又$0<A<\pi$，故$A=\dfrac{2\pi}{3}$. ……………………………………2 分

(2)由$A=\dfrac{2\pi}{3}$及①，利用余弦定理$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$可得$c=4$，………………3 分

由$A=\dfrac{2\pi}{3}$及②，利用余弦定理$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$可得$c=10$，……………………………4 分

由$A=\dfrac{2\pi}{3}$及③，由面积公式$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$可得$bc=60$，……………………………5 分

经分析①②不能同时成立，①③不能同时成立，故正确条件为②③，即$c=10$，$b=6$.

……………………………………………………………6 分

(i) 将$c=10$、$b=6$代入②得：$36-a^2+100+60=0$可得$a=14$，……………7 分

在ΔABC中，由正弦定理知$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{28}{\sqrt{3}}$，故$\sin B=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$. ………………8 分

(ii) 在△ABD和△ADC中，分别应用正弦定理，可得

$\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，$\dfrac{DC}{\sin\angle DAC}=\dfrac{AC}{\sin(\pi-\angle ADB)}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADB}$，两式相除即得

$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$(角平分线性质)，……………10 分

则$BD=\dfrac{5}{8}\cdot 14=\dfrac{35}{4}$，…………………………………………………11 分

在△ABD中由正弦定理得$\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AD}{\sin B}$，则$AD=\dfrac{15}{4}$. ………………………………12 分

19. 解：（1）设$BC = BE = m$，由题意ΔBCE为等腰直角三角形，折叠后ΔBPE为等腰直角三角形，取BE中点F，连接PF，则$PF \perp BE$，由于二面角$P-BE-C$为直二面角，故$PF \perp$平面$ABCD$，且$PF = \frac{\sqrt{2}}{2}m$，则$V_{P-ABE} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABE} \cdot PF = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot PF = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot m \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}m = \frac{4\sqrt{2}}{3}$，得$m = 2$，即$BC = CE = DE = 2$. …………………………………… 2 分

则$AE = BE = 2\sqrt{2}$，$AE^2 + BE^2 = AB^2$，故$AE \perp BE$，又$PF \perp$平面$ABCD$，故$AE \perp PF$，又PF与BE相交，故$AE \perp$平面PBE，故$AE \perp PB$，………………………… 4 分

又$PE \perp PB$，又PE与AE相交，故$PB \perp$平面PAE，………………………… 5 分

又$PB \subset$平面PAB，故平面$PAB \perp$平面PAE. ………………………… 6 分

（2）以D为原点，$\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}$为$x, y$轴正向，过$D$作$z$轴垂直于平面$ABCD$，建立右手空间直角坐标系，

则$D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(2,4,0)$，$P(1,3,\sqrt{2})$，…………………………………… 7 分

$\overrightarrow{AP} = (-1,3,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{DA} = (2,0,0)$，$\overrightarrow{AB} = (0,4,0)$，…………………………………… 8 分

设平面BPA的法向量为$\overrightarrow{n_1} = (x_1, y_1, z_1)$，

则$\begin{cases} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n_1} = -x_1 + 3y_1 + \sqrt{2}z_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n_1} = 4y_1 = 0 \end{cases}$，取$z_1 = 1$，可得$\overrightarrow{n_1} = (\sqrt{2},0,1)$，………… 9 分

设平面DPA的法向量为$\overrightarrow{n_2} = (x_2, y_2, z_2)$，

则$\begin{cases} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n_2} = -x_2 + 3y_2 + \sqrt{2}z_2 = 0 \\ \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{n_2} = 2x_2 = 0 \end{cases}$，取$z_2 = 3$，可得$\overrightarrow{n_2} = (0,-\sqrt{2},3)$，………… 10 分

则$\cos < \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} > = \frac{(\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{33}}{11}$，…………………………………… 11 分

由于所成二面角为钝角，故其余弦值为$-\frac{\sqrt{33}}{11}$. ………………………………… 12 分

20. 解（1）设比赛继续进行Y场韩菲/陈宇赢得全部奖金，则比赛最多再继续两场且最后一场必然这对组合赢：

当$Y = 1$时，韩菲/陈宇以$4:2$赢，$P(Y=1) = p$，………………………………… 1 分

当$Y = 2$时，韩菲/陈宇以$4:3$赢，$P(Y=2) = (1-p)p$，…………………………… 2 分

所以，韩菲/陈宇赢得全部奖金的概率为$f(p) = p + (1-p)p = 2p - p^2$. …………3 分

（2）因为进行了 5 场比赛，所以两对组合之间的输赢情况有以下四种情况：

自然终止：韩菲/陈宇组合赢 4 场，黄政/孙艺组合赢 1 场；韩菲/陈宇组合赢 1 场，黄政/孙艺组合赢 4 场.

意外终止：韩菲/陈宇组合赢 3 场，黄政/孙艺组合赢 2 场；韩菲/陈宇组合赢 2 场，黄政/孙艺组合赢 3 场. ………………………………4 分

5 场比赛不同的输赢情况有$C_4^3 + C_4^1 + C_5^3 + C_5^2$种，即 28 种. ……………… 5 分

（3）

①若韩菲/陈宇组合赢 4 场，黄政/孙艺组合赢 1 场：则韩菲/陈宇组合获得全部奖金 10000

元；

②若韩菲/陈宇组合赢3场，黄政/孙艺组合赢2场：当比赛继续下去韩菲/陈宇组合赢得全部奖金的概率为$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，黄政/孙艺赢得全部奖金的概率为$\frac{1}{4}$，概率比值为$3:1$，所以韩菲/陈宇组合分得7500元奖金；

③若韩菲/陈宇组合赢2场，黄政/孙艺组合赢3场：当比赛继续下去韩菲/陈宇组合赢得全部奖金的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，黄政/孙艺赢得全部奖金的概率为$\frac{3}{4}$，概率比值为$1:3$，所以韩菲/陈宇组合分得2500元奖金；

④若韩菲/陈宇组合赢1场，黄政/孙艺组合赢4场．则韩菲/陈宇组合没有获得奖金．

设韩菲/陈宇组合可能获得的奖金为X元，则由上述分析获得奖金X的所有可能取值为10000，7500，2500，0．……………………………………………7分

$P(X=10000)=\frac{C_4^3}{28}=\frac{1}{7}$，……………………………………………8分

$P(X=7500)=\frac{C_5^3}{28}=\frac{5}{14}$，……………………………………9分

$P(X=2500)=\frac{C_5^2}{28}=\frac{5}{14}$，……………………………………………10分

$P(X=0)=\frac{C_4^1}{28}=\frac{1}{7}$，……………………………………………11分

∴韩菲/陈宇组合获得奖金数X的分布列为：

X	10000	7500	2500	0
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{7}$

…………12分

……………………………………………………………12分

21．解：设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的右焦点$F(c,0)$，渐近线方程为$bx\pm ay=0$，则右焦点$F$到渐近线的距离$d=\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=b=\sqrt{3}$，……………………2分

又$\frac{c}{a}=2, c^2=a^2+b^2$，则$a=1, c=2$，

∴双曲线的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$．……………………4分

（2）设直线l的方程为$x=ty+2$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

联立方程得，

$$\begin{cases}3x^2-y^2=3\\x=ty+2\end{cases}\Rightarrow(3t^2-1)y^2+12ty+9=0\Rightarrow\begin{cases}3t^2-1\neq0\\\Delta>0\\y_1\cdot y_2<0\end{cases}\Rightarrow t^2<\frac{1}{3}，解得0<t<\frac{\sqrt{3}}{3}，$$

……………………… 5 分

渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$则A到两条渐近线的距离d_1，d_2满足，

$$d_1\cdot d_2=\frac{|\sqrt{3}x_1-y_1|}{2}\cdot\frac{|\sqrt{3}x_1+y_1|}{2}=\frac{|3x_1^2-y_1^2|}{4}=\frac{3}{4}，$$ ……………… 6 分

而$\begin{cases}y=\sqrt{3}x\\x=ty+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_A=\dfrac{2}{1-\sqrt{3}t}\\y_A=\dfrac{2\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}t}\end{cases}$，$|OC|=\sqrt{x_C^2+y_C^2}=2\left|\dfrac{2}{1-\sqrt{3}t}\right|=\dfrac{4}{1-\sqrt{3}t}$，

同理$|OD|=\sqrt{x_D^2+y_D^2}=\dfrac{4}{1+\sqrt{3}t}$， ……………………… 8 分

所以$S_{\triangle OAC}\cdot S_{\triangle OAD}=\dfrac{1}{2}|OC|\cdot d_1\cdot\dfrac{1}{2}|OD|\cdot d_2\Rightarrow\dfrac{1}{2}\dfrac{4}{1-\sqrt{3}t}\cdot\dfrac{1}{2}\dfrac{4}{1+\sqrt{3}t}d_1d_2=\dfrac{3}{1-3t^2}$，

……………………… 9 分

$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OFA}+S_{\triangle OFB}=\dfrac{1}{2}|OF||y_A-y_B|=\dfrac{6\sqrt{1+t^2}}{1-3t^2}$， ……………………… 10 分

所以，$\dfrac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OCA}\cdot S_{\triangle ODA}}=2\sqrt{1+t^2}$，

$\because 0<t<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\therefore\dfrac{S_{\triangle OPQ}}{S_{\triangle OAP}\cdot S_{\triangle OBP}}\in\left(2,\dfrac{4}{3}\sqrt{3}\right)$，

$\therefore$所求λ的取值范围为$[\dfrac{4}{3}\sqrt{3},+\infty)$． ……………………… 12 分

22.（1）$f'(x)=2(x-1)\ln x+(x^2-2x)\left(\frac{1}{x}\right)+(2a-1)x+2(1-a)=2(x-1)(\ln x+a)$，

……………………………………… 2 分

由于$a>0$，故$e^{-a}<1$，

当$x\in(0,e^{-a})$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$x\in(e^{-a},1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

……………………………4 分

综上，$f(x)$的单调递增区间为$(0,e^{-a})$和$(1,+\infty)$，$f(x)$的单调递减区间为$(e^{-a},1)$.

…………………………. 5 分

（2）$f(1)=-a+\frac{3}{2}$

【情况一】：若$f(1)>0$，即$a<\frac{3}{2}$时，由$f(x)$的单调性，其在$(e^{-a},+\infty)$上恒为正，无零点，在增区间$(0,e^{-a})$至多有一个零点，不符题意. …………………………. 7 分

【情况二】：若$f(1)<0$，即$a>\frac{3}{2}$时，

由于$f(2)=0+4\left(a-\frac{1}{2}\right)+4(1-a)=2>0$，由零点存在定理，$f(x)$在区间$(1,2)$上存在一个零点，…………………………………………………. 8 分

取$x\in(0,1)$，则$x-2<-1$，$\ln x<0$，$\left(a-\frac{1}{2}\right)x>0$，

$f(x)=x\left[(x-2)\ln x+\left(a-\frac{1}{2}\right)x+2(1-a)\right]>x[(-1)\ln x+0+2(1-a)]$，

当$x\in(0,e^{2(1-a)})$时，$f(x)>0$，由于$f(x)$在区间$(0,e^{-a})$上单调递增，故$f(x)$在$(0,e^{-a})$恒为正，无零点，由零点存在定理，$f(x)$在区间$(e^{-a},1)$上存在一个零点，符合题意. ……………………. 10 分

【情况三】：若$f(1)=0$，即$a=\frac{3}{2}$时，同情况二可得$f(x)$在增区间$(0,e^{-a})$恒为正，无零点，$f(x)$仅有$x=1$一个零点，不符题意. ………………………………11 分

综上，a的取值范围是$(\frac{3}{2},+\infty)$. ………………………………. 12 分

注：情况二和情况三中，需要证明$f(x)$在$(0,e^{-a})$恒为正，若无此证明就默认在$(0,e^{-a})$上无零点，情况二中扣 2 分，情况三不得分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。