高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合、常用逻辑用语、函数、导数及其应用、三角函数、解三角形。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 命题“$\forall x>0, e^x\geqslant x+1$”的否定是

A. $\forall x>0, e^x<x+1$　　B. $\exists x\leqslant 0, e^x<x+1$

C. $\exists x>0, e^x<x+1$　　D. $\forall x\leqslant 0, e^x<x+1$

2. 已知集合 $A=\{x|x^2+2x-3<0\}$，$B=\left\{x\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqslant 2\right.\right\}$，则 $A\cap B=$

A. $[-1,1)$　　B. $[-1,3)$　　C. $(-1,1)$　　D. $(-1,3)$

3. 若 $a=0.5^{0.3}$，$b=\log_{0.5}3$，$c=\log_{0.3}0.2$，则

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>a>c$　　D. $c>a>b$

4. 碳 14 的半衰期为 5 730 年. 在考古中，利用碳 14 的半衰期可以近似估计目标物所处的年代. 生物体内碳 14 含量 y 与死亡年数 x 的函数关系式是 $y=A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5\,730}}$（其中 A_0 为生物体死亡时体内碳 14 含量）. 考古学家在对考古活动时挖掘到的某生物标本进行研究，发现该生物体内碳 14 的含量是原来的 80%，由此可以推测到发掘出该生物标本时，该生物体在地下大约已经过了（参考数据：$\lg 2\approx 0.301$）

A. 1 847 年　　B. 2 022 年　　C. 2 895 年　　D. 3 010 年

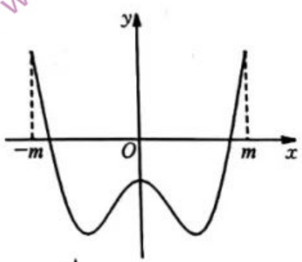
5. “$a<2$”是“$f(x)=|x-a|$在$(1,+\infty)$上单调递增”的

A. 充分不必要条件

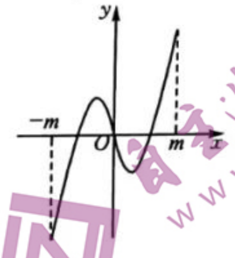
B. 必要不充分条件

C. 充要条件

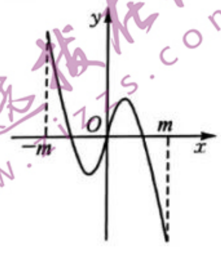
D. 既不充分也不必要条件



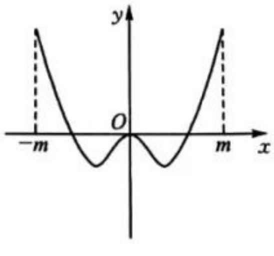
6. 如图为函数 $f(x)$（其定义域为$[-m,m]$）的图象，若 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，则 $y=f'(x)$ 的图象可能是



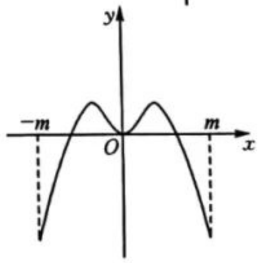
A



B



C



D

7. 已知 $f(x)=2\sin x(\sqrt{3}\cos x-\sin x)+1$，则

A. $f(x)$的最小正周期为 2π

B. $f(x)$在$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增

C. $f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$对称

D. $f(x)$的图象可由 $y=2\cos 2x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到

8. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(1-x)=f(x)$，当 $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right)$时，$f(x)=-\sqrt{-x}$，则 $f\left(\frac{13}{4}\right)=$

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

9. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$和 $g(x)$满足：对任意的实数 x，$3f(x)=g(x)-g(-x)$及 $f(x)+f(-x-6)+3=0$ 均恒成立，则 $f(2\,021)+f(2\,023)=$

A. 0　　B. 1

C. 2 021　　D. 2 022

10. 在$\triangle ABC$中，内角 A,B,C 的对边分别为 $a、b、c$，若$(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，且 $c=\sqrt{3}$，则 $a-\frac{b}{2}$的取值范围为

A. $(-1,2)$　　B. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)$

C. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$　　D. $(-1,\sqrt{3})$

11. 德国著名数学家、解析数论的创始人狄利克雷(1805 年 2 月 13 日～1859 年 5 月 5 日)，对函数论、三角级数论等都有重要贡献，主要著作有《数论讲义》《定积分》等. 狄利克雷函数就是以其名字命名的函数，其解析式为 $D(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数},\\0, x\text{ 为无理数},\end{cases}$则下列关于狄利克雷函数 $D(x)$的判断错误的是

A. 对任意有理数 t，$D(x+t)=D(x)$

B. 对任意实数 x，$D(D(x))=1$

C. $D(x)$既不是奇函数也不是偶函数

D. 存在实数 x,y，$D(x+y)=D(x)+D(y)$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}, 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\2x+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}<x\leqslant 1,\end{cases}$ $g(x)=e^x-ax(a\in\mathbf{R})$，若存在 $x_1,x_2\in[0,1]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$成立，则 a 的取值范围是

A. $(-\infty,1]$　　B. $\left(-\infty,e-\frac{5}{4}\right]$

C. $(-\infty,e-2]$　　D. $(-\infty,e]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 曲线 $y=(x-1)e^x+x$ 在 $x=0$ 处的切线方程是________.

14. 计算$\frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ-\cos 30^\circ\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}=$________.

15. 对于两个均不等于 1 的正数 a 和 b，定义：$a*b=\begin{cases}\log_a b, a\leqslant b,\\\log_b a, a>b.\end{cases}$设 $m>1,n>1$，且 $mn=s$，则$(m*s)^{-1}+(s*n)^{-1}$的值是________.

16. 已知函数 $f(x)=ax^2-2(a+1)x+2\ln x+a+2$，若$\forall x\geqslant 1$，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则 a 的取值范围为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知“$\forall x\in\mathbf{R}, x^2-4x-m>0$”为假命题.

(1)求实数 m 的取值的集合 A；

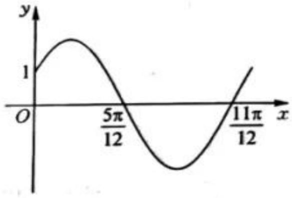
(2)在(1)的条件下，设集合 $B=\{m\mid -1<m-a\leqslant 1\}$，若 $x\in B$ 是 $x\in A$ 的充分不必要条件，求实数 a 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=K\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0, 0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示.

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $f\left(\frac{A}{2}\right)=2, b+c=5$，△$ABC$ 的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$，求 a 的值.

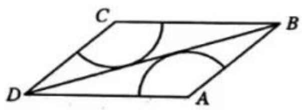


19.（本小题满分 12 分）

如图，某公园拟规划出形如平行四边形 $ABCD$ 的区域进行绿化，在此绿化区域中，分别以∠DCB 和∠DAB 为圆心角的两个扇形区域内种植花卉，且这两个扇形的圆弧均与 BD 相切.

(1)若 $AD=4\sqrt{37}, AB=3\sqrt{37}, BD=37$（单位：米），求种植花卉区域的面积；

(2)若扇形的半径为 10 米，圆心角为135°，当∠BDA 多大时，平行四边形 $ABCD$ 绿地占地面积最小？



20.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{x\ln x-x+a}{x^2}(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=0$ 时,求 $f(x)$的单调区间;

(2)若 $f(x)$在区间$(1,e^2)$上存在极值点,求实数 a 的取值范围.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{3^x-a}{3^x+a}(a\leqslant 0)$.

(1)讨论 $f(x)$的奇偶性;

(2)若 $f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减,求实数 a 的取值范围.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{ax}(a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0)$.

(1)若 $f(x)$存在零点,求 a 的取值范围;

(2)当 $a=2$ 时,若函数 $g(x)=f(x)-m$ 有两个零点 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,求证:$x_1+x_2>1$.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. C　命题“$\forall x>0, e^x \geqslant x+1$”中含有全称量词，故该命题的否定需要将全称量词改为存在量词，且只否定结论，不否定条件，所以该命题的否定为“$\exists x>0, e^x<x+1$”. 故选 C.

2. A　由 $x^2+2x-3<0$，得 $-3<x<1$，所以 $A=(-3,1)$；由 $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant 2$，得 $x \geqslant -1$，所以 $B=[-1,+\infty)$，于是 $A \cap B=[-1,1)$. 故选 A.

3. D　因为 $0<a=0.5^{0.3}<0.5^0=1$，$b=\log_{0.5}3<0$，$c=\log_{0.3}0.2>\log_{0.3}0.3=1$，所以 $b<a<c$. 故选 D.

4. A　由题意知 $A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}=0.8A_0$，所以 $\frac{x}{5730}\lg\frac{1}{2}=\lg\frac{8}{10}$，所以 $x=5730\times\frac{1-3\lg 2}{\lg 2}$，所以 $x \approx 5730\times\frac{1-0.903}{0.301}\approx 1847$. 故选 A.

注意：此题也可通过估算，得到答案：

因为 $x=5730\times\frac{1-3\lg 2}{\lg 2}\approx 5730\times\frac{1-0.903}{0.301}=5730\times\frac{0.097}{0.301}<5730\times\frac{1}{3}<2000$. 故选 A.

5. B　若 $f(x)=|x-a|$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $a \leqslant 1$，此时 $a<2$ 成立；若 $a<2$，得不到 $a \leqslant 1$，故“$a<2$”是“$f(x)=|x-a|$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增”的必要不充分条件. 故选 B.

6. A　由 $f(x)$ 图象知 $f(x)$ 在 $[-m,0]$ 上先减后增，故 $f'(x)$ 在 $(-m,0)$ 上函数值先负后正，同理 $f'(x)$ 在 $(0,m)$ 上的符号是先负后正，四个选项中仅有选项 A 符合. 故选 A.

7. D　$f(x)=2\sin x(\sqrt{3}\cos x-\sin x)+1=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\sin^2 x+1=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π，故 A 错误；当 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6}\right]$，则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，故 B 错误；由 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$，得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称，故 C 错误；$y=2\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$，其图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得 $y=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=f(x)$，故 D 正确. 故选 D.

8. C　由 $f(x)$ 是奇函数及 $f(1-x)=f(x)$，得 $f(1+x)=-f(x)$，所以 $f(x+2)=-f(x+1)=f(x)$，从而 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，所以 $f\left(\frac{13}{4}\right)=f\left(\frac{13}{4}-2\right)=f\left(\frac{5}{4}\right)=f\left(1-\frac{5}{4}\right)=f\left(-\frac{1}{4}\right)=-\sqrt{-\left(-\frac{1}{4}\right)}=-\frac{1}{2}$. 故选 C.

9. D　由 $3f(x)=g(x)-g(-x)$，得 $3f(-x)=g(-x)-g(x)$，以上两式相加并整理，得 $f(x)+f(-x)=0$，所以 $f(x)$ 为奇函数；又 $f(x)+3=-f(-x-6)=f(x+6)$，即 $f(x+6)=f(x)+3$，由逐项递推，得 $f(2021)+f(2023)=f(-1+6\times337)+f(1+6\times337)=f(-1)+3\times337+f(1)+3\times337=2022$. 故选 D.

10. C　因为 $(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，所以 $(a+c)(a-c)=b(a-b)$，整理得 $a^2+b^2-c^2=ab$，所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$，$A+B=\frac{2\pi}{3}$，又 $c=\sqrt{3}$，所以 $\frac{c}{\sin C}=2R$，解得 $R=1$，所以 $a-\frac{b}{2}=2R\left(\sin A-\frac{\sin B}{2}\right)=2\sin A-\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\frac{3}{2}\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\sqrt{3}\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)$，又 $0<A<\frac{2\pi}{3}$，则 $-\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{\sqrt{3}}{2}<a-\frac{b}{2}<\sqrt{3}$，即 $a-\frac{b}{2}$ 的取值范围为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$. 故选 C.

11. C　对于 A，对任意有理数 t，当 x 为有理数时，$x+t$ 为有理数，则 $D(x+t)=1=D(x)$；当 x 为无理数时，$x+t$ 为无理数，则 $D(x+t)=0=D(x)$，故 A 正确；对于 B，若 x 为有理数，则 $D(D(x))=D(1)=1$；若 x 为无理数，则 $D(D(x))=D(0)=1$，故 B 正确；对于 C，当 x 为有理数时，则 $-x$ 为有理数，则 $D(-x)=1=D(x)$；当 x 为无理数时，则 $-x$ 为无理数，则 $D(-x)=0=D(x)$，于是对任意实数 x，都有 $D(-x)=D(x)$，即狄利克雷函数为偶函数，故 C 错误；对于 D，取 $x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{3}$，因为 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 为无理数，所以 $D(\sqrt{2}+\sqrt{3})=0=D(\sqrt{2})+D(\sqrt{3})$，故 D 正确. 故选 C.

12. B　由题意知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的值域与 $g(x)=e^x-ax$ 在 $[0,1]$ 上的值域的交集非空. (1)先求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的值域. 当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x^3-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$，则 $f'(x)=3x^2-\frac{3}{4}=3\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\leqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递减，于是 $f\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant f(x)\leqslant f(0)$，即 $\frac{5}{4}\leqslant f(x)\leqslant\frac{3}{2}$；当 $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ 时，$f(x)=2x+\frac{1}{2}$，$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递增，所以

$f\left(\frac{1}{2}\right)<f(x)\leqslant f(1)$，即$\frac{3}{2}<f(x)\leqslant\frac{5}{2}$，综上，$f(x)$的值域为$\left[\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right]$；(2)$g'(x)=e^x-a$，①若$a\leqslant1$时，由$e^x\geqslant1$，得$g'(x)\geqslant0$，所以$g(x)$在$[0,1]$上单调递增，所以$g(0)\leqslant g(x)\leqslant g(1)$，即$g(x)$的值域为$[1,e-a]$，因为$e-a>\frac{5}{4}$，所以$[1,e-a]\cap\left[\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right]\neq\varnothing$，符合题意；②当$1<a<e$时，$\ln a\in(0,1)$，易知$g(x)$在$[0,\ln a]$上单调递减，在$[\ln a,1]$上单调递增；因为$g(0)=1$，$g(1)=e-a$，要使$g(x)$的值域与$\left[\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right]$的交集非空，必须$e-a\geqslant\frac{5}{4}$，解得$1<a\leqslant e-\frac{5}{4}$；③当$a\geqslant e$时，$g'(x)\leqslant0$，$g(x)$在$[0,1]$上单调递减，所以$g(1)\leqslant g(x)\leqslant g(0)$，即$g(x)$的值域为$[e-a,1]$，此时$[e-a,1]\cap\left[\frac{5}{4},\frac{5}{2}\right]=\varnothing$，不符合题意. 综上所述，实数$a$的取值范围为$\left(-\infty,e-\frac{5}{4}\right]$. 故选 B.

13. $x-y-1=0$　$y'=xe^x+1$，当$x=0$时，$y=-1$，$y'=1$，所以切线方程为$y-(-1)=x$，即$x-y-1=0$.

14. $\frac{3}{2}$　$\frac{\sqrt{3}\cos20^\circ-\cos30^\circ\cos40^\circ}{\sin40^\circ}=\frac{\sqrt{3}\cos(60^\circ-40^\circ)-\cos30^\circ\cos40^\circ}{\sin40^\circ}=\frac{\sqrt{3}\cos60^\circ\cos40^\circ+\sqrt{3}\sin60^\circ\sin40^\circ-\cos30^\circ\cos40^\circ}{\sin40^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos40^\circ+\frac{3}{2}\sin40^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos40^\circ}{\sin40^\circ}=\frac{3}{2}$.

15. 1　由$m>1$，$n>1$及$mn=s$，得$s>m>1$，$s>n>1$，由新定义得$(m*s)^{-1}+(s*n)^{-1}=\frac{1}{\log_m s}+\frac{1}{\log_n s}=\log_s m+\log_s n=\log_s mn=\log_s s=1$.

16. $[1,+\infty)$　$f'(x)=\frac{2(x-1)(ax-1)}{x}$，若$a\leqslant0$时，则$f'(x)\leqslant0$在$[1,+\infty)$上恒成立，从而$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减，所以$f(x)\leqslant f(1)=0$，不合题意；若$0<a<1$时，则当$x\in\left(1,\frac{1}{a}\right)$时，$f'(x)<0$；当$x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$\left[1,\frac{1}{a}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增，从而$f\left(\frac{1}{a}\right)<f(1)=0$，不合题意；若$a\geqslant1$时，则$ax-1\geqslant x-1$，所以$f'(x)\geqslant0$在$[1,+\infty)$上恒成立，$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，于是$f(x)\geqslant f(1)=0$，符合题意. 综上所述，$a$的取值范围为$[1,+\infty)$.

17. 解：(1)法一：因为“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-4x-m>0$”为假命题，所以“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-4x-m\leqslant0$”为真命题，即$\exists x\in\mathbf{R}$，$m\geqslant x^2-4x$为真命题，等价于$m\geqslant(x^2-4x)_{\min}$. ………………………… 3 分
又$x^2-4x=(x-2)^2-4\geqslant-4$，所以$m\geqslant-4$，即$A=\{m|m\geqslant-4\}$. ………………………… 5 分
法二：因为“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-4x-m>0$”为假，所以“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-4x-m\leqslant0$”为真，即$\Delta=16+4m\geqslant0$，所以$m\geqslant-4$，即$A=\{m|m\geqslant-4\}$. ………………………… 5 分
(2)因为$x\in B$是$x\in A$的充分不必要条件，所以集合B为集合A的真子集， ………………………… 6 分
又$B=\{m|-1<m-a\leqslant1\}$，所以$B=\{m|a-1<m\leqslant a+1\}$， ………………………… 8 分
所以$a-1\geqslant-4$，解得$a\geqslant-3$，故实数a的取值范围是$[-3,+\infty)$. ………………………… 10 分

18. 解：(1)由图知$T=2\left(\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)=\pi$，所以$\omega=2$， ………………………… 1 分
因为$f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=0$，所以$\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi\right)=0$，所以$\frac{5\pi}{6}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$， ………………………… 3 分
解得$\varphi=-\frac{5\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$， ………………………… 4 分
又$f(0)=1$，即$K\sin\frac{\pi}{6}=1$，所以$K=2$，
所以$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. ………………………… 6 分
(2)因为$f\left(\frac{A}{2}\right)=2$，即$\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=1$，由$A\in(0,\pi)$，得$A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$，所以$A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，
所以$A=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 8 分
因为$\triangle ABC$的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$，即$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，所以$bc=3$， ………………………… 10 分
又$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b+c=5$，
所以$a^2=(b+c)^2-3bc=25-9=16$，
所以$a=4$. ………………………… 12 分

19. 解：(1)易知两个扇形全等，设扇形的半径为 r，在△ABD 中，$\cos A=\dfrac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\dfrac{(3\sqrt{37})^2+(4\sqrt{37})^2-37^2}{2\times3\sqrt{37}\times4\sqrt{37}}$

$=-\dfrac{1}{2}$，…………………………………………………………………… 2 分

又 $0°<A<180°$，所以 $A=120°$. ……………………………………………………… 3 分

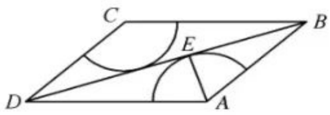
因为$\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\sin A=\dfrac{1}{2}BD\cdot r$，所以 $r=\dfrac{AB\cdot AD\sin A}{BD}=\dfrac{3\sqrt{37}\times4\sqrt{37}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{37}=6\sqrt{3}$，

所以种植花卉区域的面积为 $2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi}{3}\times(6\sqrt{3})^2=72\pi$(平方米). ………………………… 6 分

(2)设平行四边形绿地的占地面积为 S，$\angle BDA=\theta(0°<\theta<45°)$，作 $AE\perp BD$，垂足为 E，则 E 为切点，所以 $AE=10$.

…………………………………………………………………………………… 7 分

因为$\angle DAB=135°$，所以$\angle DBA=45°-\theta$，



在△ADE 中，$\sin\theta=\dfrac{AE}{AD}$，所以 $AD=\dfrac{10}{\sin\theta}$，…………………………… 8 分

在△ABE 中，$\sin(45°-\theta)=\dfrac{AE}{AB}$，所以 $AB=\dfrac{10}{\sin(45°-\theta)}$，…………………… 9 分

所以 $S=AB\cdot AD\sin135°=\dfrac{50\sqrt{2}}{\sin(45°-\theta)\sin\theta}=\dfrac{100}{\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta}$

$=\dfrac{200}{\sin2\theta+\cos2\theta-1}=\dfrac{200}{\sqrt{2}\sin(2\theta+45°)-1}$. ……………………………………… 11 分

因为 $0°<\theta<45°$，所以当 $2\theta+45°=90°$，即 $\theta=22.5°$时，S 取得最小值，且 $S_{\min}=200(\sqrt{2}+1)$平方米.

…………………………………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=\dfrac{\ln x-1}{x}$，故其定义域为$(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{x^2}$，………………… 1 分

令 $f'(x)>0$，即$\dfrac{2-\ln x}{x^2}>0$，解得 $0<x<e^2$，即 $f(x)$的单调递增区间为$(0,e^2)$；……………………… 3 分

令 $f'(x)<0$，即$\dfrac{2-\ln x}{x^2}<0$，解得 $x>e^2$，即 $f(x)$的单调递减区间为$(e^2,+\infty)$. ……………………… 5 分

(2)因为 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^2}(1<x<e^2)$，

所以 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2a}{x^3}=\dfrac{2x-x\ln x-2a}{x^3}$，………………………………………… 6 分

令 $g(x)=2x-x\ln x-2a$，则 $g'(x)=2-\ln x-1=1-\ln x$，………………………………………… 7 分

令 $g'(x)>0$，得 $0<x<e$；令 $g'(x)<0$，得 $x>e$；又 $x\in(1,e^2)$，

所以 $g(x)$在$(1,e)$上单调递增，在(e,e^2)上单调递减，…………………………………………… 9 分

所以 $g(x)_{\max}=g(e)=e-2a$，$g(1)=2-2a$，$g(e^2)=-2a$. …………………………………………… 10 分

若 $f(x)$在$(1,e^2)$上存在极值点，则$\begin{cases}e-2a>0,\\2-2a<0,\end{cases}$或$\begin{cases}e-2a>0,\\-2a<0,\end{cases}$解得 $1<a<\dfrac{e}{2}$或 $0<a<\dfrac{e}{2}$，

所以实数 a 的取值范围为$\left(0,\dfrac{e}{2}\right)$. ……………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)由 $3^x+a\neq0$，得 $3^x\neq-a$. ①当 $a=0$ 时，$3^x\neq0$ 对任意实数 x 恒成立，故函数的定义域为 $\mathbf{R}$，此时 $f(x)=1$，$f(-x)=1=f(x)$，此时函数 $f(x)$为偶函数；……………………………………………………… 1 分

②当 $a<0$ 时，$-a>0$，所以 $3^x\neq-a$ 的解集为$\{x|x\neq\log_3(-a)\}$，故 $f(x)$的定义域为$\{x|x\neq\log_3(-a)\}$；

…………………………………………………………………………………… 2 分

当$\log_3(-a)\neq0$，即 $a\neq-1$ 时，$f(x)$的定义域关于原点不对称，此时 $f(x)$为非奇非偶函数；

…………………………………………………………………………………… 3 分

当$\log_3(-a)=0$，即 $a=-1$ 时，$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，此时 $f(x)=\dfrac{3^x+1}{3^x-1}$，………… 4 分

$f(-x)=\dfrac{3^{-x}+1}{3^{-x}-1}=\dfrac{1+3^x}{1-3^x}=-\dfrac{3^x+1}{3^x-1}=-f(x)$，此时 $f(x)$为奇函数. ……………………… 5 分

综上所述，当 $a=0$ 时，$f(x)$为偶函数；当 $a=-1$ 时，$f(x)$为奇函数；当 $a<0$ 且 $a\neq-1$ 时，$f(x)$为非奇非偶函数.

…………………………………………………………………………………… 6 分

(2)当 $a=0$ 时，$f(x)=1$，在 $(1,+\infty)$ 上不单调，不合题意；……7分

当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq\log_3(-a)\}$，且 $f(x)=1+\dfrac{-2a}{3^x+a}$，……8分

因为 $a<0$，所以 $-2a>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\log_3(-a))$，$(\log_3(-a),+\infty)$ 上单调递减，……10分

又 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $(1,+\infty)\subseteq(\log_3(-a),+\infty)$，

所以 $\log_3(-a)\leqslant 1$，即 $0<-a\leqslant 3$，

所以 $-3\leqslant a<0$，

故实数 a 的取值范围为 $[-3,0)$。……12分

22. (1)解：法一：函数 $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{ax-1}{ax^2}$，……1分

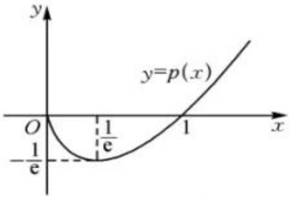
若 $a<0$，$f'(x)>0$ 恒成立，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-1+\dfrac{e}{a}<0$；因为 $a<0$，所以 $e^{-\frac{1}{a}}>1$，所以 $ae^{-\frac{1}{a}}<a<0$，所以 $\dfrac{1}{ae^{-\frac{1}{a}}}>\dfrac{1}{a}$，所以 $f(e^{-\frac{1}{a}})=-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{ae^{-\frac{1}{a}}}>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{e^{\frac{1}{a}}}\right)$ 上一定存在零点；

……3分

若 $a>0$，当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，要使函数 $f(x)$ 一定存在零点，只需 $f(x)_{极小值}=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a\cdot\frac{1}{a}}\leqslant 0$，解得 $a\geqslant e$，

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup[e,+\infty)$。……5分

法二：$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{ax}$ 存在零点 $\Leftrightarrow \ln x+\dfrac{1}{ax}=0$ 存在实根 $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{a}=x\ln x$ 有实根，……1分



令 $p(x)=x\ln x$，则 $p'(x)=1+\ln x$。

因为 $p'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{1}{e}$，$p'(x)>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{e}$，

所以 $p(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增。……2分

所以 $p(x)_{\min}=p\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$。又 $x\to 0$ 时，$p(x)\to 0$；$x\to+\infty$ 时，$p(x)\to+\infty$。……3分

由题意，$-\dfrac{1}{a}>0$，或 $-\dfrac{1}{e}\leqslant-\dfrac{1}{a}<0$。

所以 $a<0$，或 $a\geqslant e$。

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup[e,+\infty)$。……5分

(2)证明："函数 $g(x)=f(x)-m$ 有两个零点 x_1,x_2"等价于"方程 $f(x)=m$ 有两个不同的实数根 x_1,x_2"。

当 $a=2$ 时，方程 $f(x)=m$，即为 $\ln x+\dfrac{1}{2x}=m$，

所以 $\ln x_1+\dfrac{1}{2x_1}=m$，且 $\ln x_2+\dfrac{1}{2x_2}=m$，……6分

两式相减，得 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{1}{2x_2}-\dfrac{1}{2x_1}$，即 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{x_1-x_2}{2x_2x_1}$，则 $x_1x_2=\dfrac{x_1-x_2}{2\ln\frac{x_1}{x_2}}$，……7分

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}\ (0<t<1)$，有 $x_1=\dfrac{t-1}{2\ln t}$，$x_2=\dfrac{x_1}{t}=\dfrac{1-\frac{1}{t}}{2\ln t}$，

从而得 $x_1+x_2=\dfrac{t-\frac{1}{t}}{2\ln t}$，……8分

令 $h(t)=t-\dfrac{1}{t}-2\ln t\ (0<t<1)$，则 $h'(t)=1+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t}=\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^2>0$，

即函数 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增。……10分

$\forall t\in(0,1)$，$h(t)<h(1)=0$，即 $t-\dfrac{1}{t}<2\ln t$，……11分

而 $\ln t<0$，因此 $\forall t\in(0,1)$，$\dfrac{t-\frac{1}{t}}{2\ln t}>1$ 恒成立，所以 $x_1+x_2>1$。……12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。