浙里卷天下——2022～2023学年高三百校联考3月测试

数　　学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。来源：高三答案公众号
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 若复数$\frac{a+i}{1+i}=b(2-i)(a,b\in\mathbf{R})$，则$ab=$

A. -3　　B. -1　　C. 1　　D. 3

2. 已知集合$A=\{x|y=\ln(x^2-1)\}$，$B=\{y|y=x^2-4x-5\}$，则$A\cap B=$

A. $(-1,1)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $[-9,+\infty)$　　D. $[-9,-1)\cup(1,+\infty)$

3. 设向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$均为单位向量，则“$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$”是“$|3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|$”的

A. 充分不必要条件　　B. 充要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 某企业为了响应并落实国家污水减排政策，加装了污水过滤排放设备，在过滤过程中，污染物含量M(单位：mg/L)与时间t(单位：h)之间的关系为$M=M_0e^{-kt}$(其中M_0,k是正常数)．已知在处理过程中，该设备每小时可以清理池中残留污染物10%，则过滤一半的污染物需要的时间最接近(参考数据：$\lg 2\approx0.30,\lg 3\approx0.48$)

A. 6小时　　B. 8小时

C. 10小时　　D. 12小时

5. 设集合$A\subseteq B$，且$P(A)=0.2$，$P(B)=0.7$，则下列说法正确的是

A. $P(B|A)=\frac{2}{7}$　　B. $P(A|B)=\frac{2}{3}$　　C. $P(B|\overline{A})=\frac{5}{8}$　　D. $P(\overline{A}B)=\frac{7}{10}$

6. 对于集合A,B，定义$A-B=\{x|x\in A,且x\notin B\}$．若$A=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x|x=3k+1,k\in\mathbf{N}\}$，将集合$A-B$中的元素从小到大排列得到数列$\{a_n\}$，则$a_7+a_{30}=$

A. 55　　B. 76　　C. 110　　D. 113

7. 已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，直线l过焦点F与C交于A,B两点，以AB为直径的圆与y轴交于D,E两点，且$|DE|=\frac{4}{5}|AB|$，则直线l的斜率为

A. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. ±1　　C. ±2　　D. $\pm\frac{1}{2}$

8. 已知 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{3})$，$\beta\in(0,\frac{\pi}{6})$，且 $\beta\tan\frac{\alpha}{2}=4\sin^2\frac{\beta}{2}$，则

A. $\beta<\alpha<2\beta$

B. $\frac{\alpha}{8}<\beta<\frac{\alpha}{4}$

C. $\frac{\alpha}{4}<\beta<\frac{\alpha}{2}$

D. $\frac{\beta}{2}<\alpha<\beta$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，S_n 是其前 n 项的和，且 $d>0$，$S_{100}=S_{102}$，则

A. $a_1<0$

B. $a_{101}=0$

C. $S_{202}=0$

D. $S_n\geqslant S_{101}$

10. 设 $x>0$，$y>0$，且 $\frac{1}{x}+2y=2$，则

A. $0<y<1$

B. $x+y>1$

C. $x-2y$ 的最小值为 0

D. $x+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AD_1}$，$\overrightarrow{BN}=\mu\overrightarrow{BD}$，则下列说法正确的有

A. $|\overrightarrow{MN}|$ 的最小值是 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B. 当 $AC_1\perp MN$ 时，M 为线段 AD_1 的中点

C. 当 $BN=D_1M$ 时，MN∥平面 CDD_1C_1

D. 以 B 为球心，BD 为半径的球面与该正方体的表面形成的交线长为 3π

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 **R**. 记 $g(x)=f'(x)$. 若 $f(x+\frac{5}{2})$ 为偶函数，$g(\frac{3}{2}-2x)$ 为奇函数，则

A. $g(-2)=g(6)$

B. $g(\frac{9}{2})=0$

C. $f(1)=f(2)$

D. $f(-\frac{1}{2})=0$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 展开式中 x^4 的系数为__________.

14. 写出一个同时具有下列性质①②③的函数：$f(x)=$__________.

①$f(x)$ 的周期为 2；②$f(x)$ 在 $(\frac{2}{3},\frac{3}{2})$ 上为减函数；③$f(x)$ 的值域为 $[0,4]$.

15. 已知函数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+2x$，若存在实数 $x_0\in[0,3]$，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $mx+y-3=0$ 垂直，则实数 m 的最大值是__________.

16. 在直角坐标系 xOy 中，矩形的四个顶点都在椭圆 $C:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$ 上，将该矩形绕 y 轴旋转一周，得到一个圆柱体，当该圆柱体的体积最大时，其侧面积为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知数列$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列，且________.

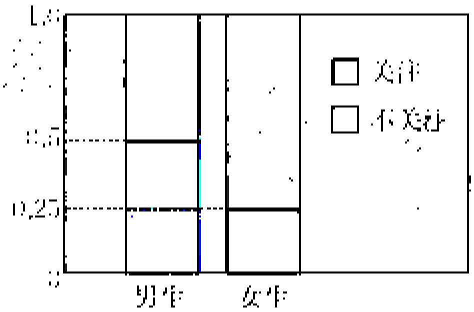
请在①$a_4+a_9=26$；②a_1,a_3,a_9 成等比数列；③$S_{10}=110$ 这三个条件中任选一个补充在上面的横线上，并解答下面问题.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若 $b_n=a_n^2$，记数列$\{\frac{1}{b_n}\}$的前 n 项和为 T_n，证明：$T_n<\frac{1}{2}$.

18.（12 分）

国际足联世界杯，简称“世界杯”，是由全世界国家级别球队参与的，并具有最大知名度和影响力的足球赛事，2022 年世界杯于 11 月 21 日—12 月 18 日在卡塔尔举行. 某大学为了解本校学生对世界杯的关注程度，从学生中随机抽取了 200 名学生进行调查(其中男生 120 名)，根据样本的调查结果得到如下图所示的等高规程条形图.



	关注	不关注	合计
男生			
女生			
合计			

(1)请完成上面的 2×2 列联表，并判断能否有 99.9%的把握认为学生是否关注世界杯与性别有关.

(2)从这 200 名学生里对世界杯关注的学生中，按性别采用分层抽样的方法抽取 8 名学生，再从这 8 名学生中随机选取 3 名参与学校足协活动. 记参与学校足协活动的男生人数为 X，求 X 的分布列与期望.

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.050	0.010	0.005	0.001
k_0	3.841	6.635	7.879	10.828

19.（12 分）

在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，点 D 在 BC 边上. 在平面 ABC 内，过 D 作 $DF\perp BC$ 且 $DF=AC$.

(1)若 D 为 BC 的中点，且$\triangle ABC$ 的面积等于$\triangle CDF$ 面积的$\sqrt{2}$倍，求$\angle ABC$；

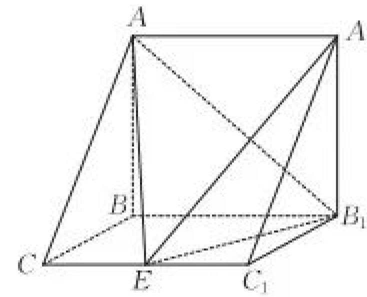
(2)若$\angle ABC=30°$，且 $CD=3BD$，求 $\tan\angle CFB$.

20.(12 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB\perp$ 侧面 BCC_1B_1,已知 $AB=BB_1=2BC=2$,$\angle B_1BC=\frac{2\pi}{3}$,$E$ 是棱 CC_1 的中点.

(1)求二面角 $A-B_1E-A_1$ 的正弦值;

(2)在棱 CA 上是否存在一点 F,使得 EF 与平面 A_1EB_1 所成角的正弦值为 $\frac{5\sqrt{17}}{34}$? 若存在,求 CF;若不存在,请说明理由.



21.(12 分)

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右顶点分别为 $A(-1,0)$,$B(1,0)$,离心率为 2.

(1)过右焦点 F 的直线 l 与双曲线 C 交于 P,Q 两点,且$\triangle BPQ$ 的面积是$\frac{3\sqrt{2}}{2}$,求直线 l 的方程;

(2)设点 M,N 在双曲线 C 的右支上,直线 AM,BN 在 y 轴上的截距之比为 $1:3$,证明:直线 MN 过定点.

22.(12 分)

已知函数 $f(x)=\sin x+(1-x)\cos x,x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性;

(2)若存在$-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<x_3<\frac{\pi}{2}$,使得 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$,证明:$2x_1+x_2>x_3-2$.

浙里卷天下——2022～2023 学年高三百校联考 3 月测试

数学参考答案

1. D 【解析】因为$\frac{a+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=b(2-\mathrm{i})$，所以 $a+\mathrm{i}=b(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=b(3+\mathrm{i})$，

所以$\begin{cases}a=3b,\\1=b,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\b=1,\end{cases}$所以 $ab=3$. 故选 D.

2. D 【解析】由 $x^2-1>0$，解得 $x>1$ 或 $x<-1$，所以 $A=\{x|x>1$ 或 $x<-1\}$，
由 $y=x^2-4x-5=(x-2)^2-9\geqslant-9$，得 $B=\{y|y\geqslant-9\}$，所以 $A\cap B=[-9,-1)\cup(1,+\infty)$. 故选 D.

3. B 【解析】若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $|3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2=9\boldsymbol{a}^2-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=13$，
$|2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|^2=4\boldsymbol{a}^2+12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}^2=13$，所以 $|3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|$，满足充分性；
若 $|3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|$，则两边平方得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，满足必要性. 故选 B.

4. B 【解析】由题意可知 $(1-10\%)M_0=M_0\mathrm{e}^{-k}$，所以 $\mathrm{e}^{-k}=0.9$，
又因为 $(1-50\%)M_0=M_0\mathrm{e}^{-kt}$，所以 $0.5=\mathrm{e}^{-kt}=(\mathrm{e}^{-k})^t=0.9^t$，
所以 $\log_{0.9}0.9^t\geqslant\log_{0.9}\frac{1}{2}$，即 $t\geqslant\log_{0.9}\frac{1}{2}$，所以 $t\geqslant\frac{\lg 2}{1-\lg 9}=\frac{\lg 2}{1-2\lg 3}\approx7.5$，故选 B.

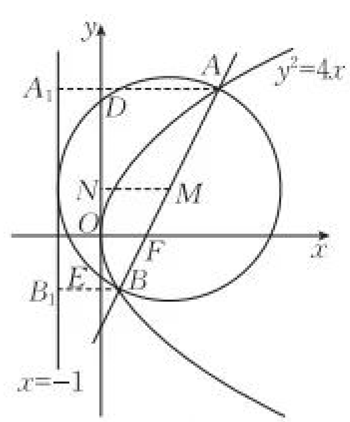
5. C 【解析】因为 $A\subseteq B$，所以 $P(AB)=P(A)=0.2$，所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=1$，

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{2}{7}$，$P(\overline{A}B)=0.7-0.2=0.5$，

因为 $P(\overline{A})=1-P(A)=0.8$，所以 $P(B|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{5}{8}$，故选 C.

6. C 【解析】因为 $A=\{1,3,5,7,9,11,\cdots\}$，$B=\{1,4,7,10,13,16,19,22,25,\cdots\}$，
所以 $A-B=\{3,5,9,11,15,\cdots\}$，所以 $a_7=21$.
$A-B$ 相当于 A 中去除 $x=6n-5(n\in\mathbf{N}^*)$ 形式的数，其前 45 项包含了 15 个这样的数，
所以 $a_{30}=89$. 故选 C.

7. C 【解析】设 $|AB|=2r(2r\geqslant4)$，AB 的中点为 M，$MN\perp y$ 轴于点 N，过 A,B 作准线 $x=-1$ 的垂线，垂足分别为 A_1,B_1，如图所示.



由抛物线的定义知 $2(|MN|+1)=|AA_1|+|BB_1|=|AF|+|BF|=|AB|=2r$，

则 $|MN|=r-1$，所以 $|DE|=2\sqrt{r^2-(r-1)^2}=\frac{8}{5}r$，即 $16r^2-50r+25=0$，

解得 $r=\frac{5}{2}$ 或 $r=\frac{5}{8}$（舍去），故 M 的横坐标为 $\frac{3}{2}$.

设直线 $l:y=k(x-1)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，将 $y=k(x-1)$ 代入 $y^2=4x$，

得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，则 $x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}=3$，解得 $k=\pm2$，故选 C.

8. A 【解析】$\because x\in(0,\frac{\pi}{6})$，令 $f(x)=x-\sin x$，$g(x)=\tan x-x$，

则 $f'(x)=1-\cos x>0$，$g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1>0$，$\therefore f(x)$，$g(x)$在$(0,\frac{\pi}{6})$上单调递增，

$\therefore f(x)>f(0)=0$，$g(x)>g(0)=0$，$\therefore \sin x<x<\tan x$，

$\therefore \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{4\sin^2\frac{\beta}{2}}{\beta}<\frac{4(\frac{\beta}{2})^2}{\beta}=\beta$，$\because \tan\frac{\alpha}{2}>\frac{\alpha}{2}$，$\therefore \alpha<2\beta$.

$\because \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{4\sin^2\frac{\beta}{2}}{\beta}=\frac{4\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\beta}\cdot\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{2\sin\beta}{\beta}\cdot\tan\frac{\beta}{2}$.

令 $t(x)=2\sin x-x$，$x\in(0,\frac{\pi}{6})$，

$\therefore t'(x)=2\cos x-1>2\cos\frac{\pi}{6}-1=\sqrt{3}-1>0$，$\therefore t(x)$是增函数.

$\therefore t(x)>t(0)=0$，$\therefore 2\sin x>x$，$\therefore \tan\frac{\alpha}{2}>\tan\frac{\beta}{2}$，$\therefore \alpha>\beta$.

综上所述，$\beta<\alpha<2\beta$. 故选 A.

9. ACD 【解析】$S_{100}=S_{102}$，则 $a_{101}+a_{102}=0$，因为 $d>0$，所以 $a_{101}<0$，$a_{102}>0$，$a_1<0$，$S_{202}=\frac{a_1+a_{202}}{2}\times 202=\frac{a_{101}+a_{102}}{2}\times 202=0$，因为 $a_{101}<0$，$a_{102}>0$，所以在 S_n 中，S_{101}最小.

10. ACD 【解析】对于 A，由$\begin{cases} y>0, \\ \frac{1}{x}=2-2y>0, \end{cases}$解得 $0<y<1$，故 A 正确；

对于 B，因为 $x-y=\frac{1}{2-2y}+y$，$f(y)=\frac{1}{2-2y}-y$ 在$(0,1)$上单调递增，

且 $f(0)=\frac{1}{2}$，$f(\frac{1}{5})=\frac{1}{2\times\frac{1}{5}}+\frac{1}{5}=\frac{33}{10}<1$，故 B 错误；

对于 C，$x-2y=\frac{1}{2-2y}-2y=\frac{1}{2-2y}-(2-2y)-2\geqslant 0$，当且仅当 $y=\frac{1}{2}$时，等号成立，故 C 正确；

对于 D，$x+\frac{1}{y}=\frac{1}{2-2y}+\frac{2}{2y}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2-2y}+\frac{2}{2y})[(2-2y)+2y]$

$=\frac{1}{2}\cdot(3+\frac{2y}{2-2y}+\frac{2-2y}{y})\geqslant\frac{1}{2}\cdot(3+2\sqrt{\frac{2y}{2-2y}\cdot\frac{2-2y}{y}})=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当$\frac{2y}{2-2y}=\frac{2-2y}{y}$，即 $y=2-\sqrt{2}$时，等号成立，故 D 正确. 故选 ACD.

11. ABD 【解析】因为$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{BD}-\lambda\overrightarrow{AD_1}=(1-\mu)\overrightarrow{AB}+(\mu-\lambda)\overrightarrow{AD}-\lambda\overrightarrow{AA_1}$，所以$|\overrightarrow{MN}|=2\sqrt{(1-\mu)^2+(\mu-\lambda)^2+\lambda^2}=2\sqrt{2\mu^2-(2+2\lambda)\mu+1+2\lambda^2}$，当 $\mu=\frac{1+\lambda}{2}$时，$|\overrightarrow{MN}|\geqslant 2\sqrt{\frac{3\lambda^2-2\lambda+1}{2}}\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

当且仅当 $\lambda=\frac{1}{3}$，$\mu=\frac{2}{3}$时，等号成立，所以 A 正确.

当 $AC_1\perp MN$ 时，$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})\cdot[(1-\mu)\overrightarrow{AB}+(\mu-\lambda)\overrightarrow{AD}-\lambda\overrightarrow{AA_1}]=4-8\lambda=0$，所以 $\lambda=\frac{1}{2}$，所以 M 为线段 AD_1 的中点，所以 B 正确.

因为$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{MN}=4(\mu-\lambda)=0$，所以 $\mu=\lambda$，所以 $BN=AM$，所以 C 错误.

以 B 为球心，BD 为半径的球面与四边形 ADD_1A_1 形成的交线是以 A 为圆心，AD 为半径的圆弧，所以圆弧长为 π，同理可得以 B 为球心，BD 为半径的球面与四边形 $A_1B_1C_1D_1$，CDD_1C_1 形成的交线长均为 π，所以 D 正确.

12. AB 【解析】若 $f(x+\frac{5}{2})$为偶函数，$g(\frac{3}{2}-2x)$为奇函数，则 $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{5}{2}$ 对称，$g(\frac{3}{2}+2x)=-g(\frac{3}{2}-2x)$，所以 $g(x)$的图象关于点$(\frac{3}{2},0)$对称. 因为 $f(x)=f(5-x)$，得 …以

$g(x)=-g(5-x)$，所以 $g(x)+g(5-x)=0$，所以 $g(x)$ 的图象关于$(\frac{5}{2},0)$对称，所以 $g(x+2)=g(x)$，即周期为 2，所以 $g(-2)=g(6)$，令 $x=0$，则 $g(\frac{3}{2})=0$，所以 $g(\frac{7}{2})=0$，所以 $g(\frac{7}{2})=g(\frac{3}{2}+2)=-g(\frac{3}{2}-2)=-g(\frac{1}{2})=0$，所以 $g(\frac{1}{2})=0$，$g(\frac{9}{2})=g(\frac{1}{2})=0$，所以 A，B 正确.

因为 $g(\frac{3}{2}+x)=-g(\frac{3}{2}-x)$，即 $f'(\frac{3}{2}+x)=-f'(\frac{3}{2}-x)$，则$[f(\frac{3}{2}+x)]'=[f(\frac{3}{2}-x)]'$，$f(\frac{3}{2}+x)=f(\frac{3}{2}-x)+C$($C$ 为常数)，$f(1)=f(2)+C$，所以 C 错误.

$f(-\frac{1}{2})=f(\frac{7}{2})+C=f(\frac{3}{2})+C$，不一定为零，所以 D 错误.

13. 135 【解析】$(1-x)^{10}$ 的展开式通项公式为 $T_{r+1}=C_{10}^r(-x)^r=C_{10}^r(-1)^rx^r$，其中 $T_3=C_{10}^2x^2=45x^2$，$T_4=-C_{10}^3x^3=-120x^3$，$T_5=C_{10}^4x^4=210x^4$，故二项式 $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 的展开式中 x^4 项为 $45x^2\cdot x^2-120x^3\cdot x+210x^4=135x^4$，即展开式中 x^4 的系数为 135.

14. 三角函数(答案不唯一)

15. $\frac{1}{2}$ 【解析】由 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2$ …… (x)在点$(x_0,f(x_0))$处的切线斜率为 $f'(x_0)=-x_0^2+4x_0+2$，且 f …… 调递减，$f'(0)=2$，$f'(2)=6$，$f'(3)=5$，故 $f'(x_0)\in[2,6]$，因为 …… $\in[\frac{1}{6},\frac{1}{2}]$，即实数 m 的最大值是$\frac{1}{2}$.

16. $\frac{8\sqrt{6}\pi}{3}$ 【解析】设矩形在第一象限的顶点坐标为(x_0,y_0)，根据长方形和椭圆的对称性可得，将该矩形绕 y 轴旋转一周得到的圆柱体的母线长 $l=2y_0$，底面圆的半径 $r=x_0$，由 C：$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$，可得 $x_0^2=3-\frac{3y_0^2}{4}$，

所以圆柱体的体积 $V=\pi r^2\cdot l=\pi x_0^2\cdot 2y_0=\pi(3-\frac{3y_0^2}{4})\cdot 2y_0=\pi(-\frac{3y_0^3}{2}+6y_0)$，

令 $g(x)=-\frac{3x^3}{2}+6x$，$0<x<2$，则 $g'(x)=-\frac{9x^2}{2}-6$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以当 $0<x<\frac{2\sqrt{3}}{3}$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，当$\frac{2\sqrt{3}}{3}<x<2$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

所以当 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$时，$g(x)$有最大值，即此时圆柱体的体积最大，

所以此时圆柱体的母线长 $l=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，底面圆的半径 $r=\sqrt{2}$，

故圆柱体的侧面积为 $l\cdot 2\pi r=\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot 2\pi\times\sqrt{2}=\frac{8\sqrt{6}\pi}{3}$.

17.【解析】(1)由已知 $S_{n+1}=S_n+a_n+2$，所以 $a_{n+1}-a_n=2$，
所以$\{a_n\}$是等差数列，公差 $d=2$.
若选①.
又因为 $a_4+a_9=26$，所以 $2a_1+11d=26$，
解得 $a_1=2$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n$.
若选②.
又因为 a_1,a_3,a_9 成等比数列，所以 $a_3^2=a_1\cdot a_9$，
所以$(a_1+4)^2=a_1(a_1+16)$，解得 $a_1=2$，
所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n$.
若选③.
因为 $S_{10}=110$，所以 $10a_1+45\times 2=110$，

解得 $a_1=2$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n$. ………………………………………… 4 分

(2)因为 $b_n=a_n^2$，由(1)知，$a_n=2n$，所以 $b_n=4n^2$，

所以 $\frac{1}{b_n}=\frac{1}{4n^2}$，所以 $T_n=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2})<\frac{1}{4}(1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n-1)})$，

所以 $T_n<\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}$，所以 $T_n<\frac{1}{2}$. ………………………………………… 10 分

18.【解析】(1)有 120 名男生，则有 80 名女生，结合条形图，男生中关注的有 60 人，不关注的有 60 人，女生中关注的有 20 人，不关注的有 60 人，则列联表如下：

	关注	不关注	合计
男生	60	60	120
女生	20	60	80
合计	80	120	200

则 $K^2=\frac{200\times(60\times60-20\times60)^2}{120\times80\times80\times120}=12.5$，$12.5>10.828$，则有 99.9%的把握认为学生是否关注世界杯与性别有关. ………………………………………… 4 分

(2)由(1)可知，关注的学生中，男女比例为 3∶1，则抽出的 8 人中，男生有 6 人，女生有 2 人，则 X 的对应值有 1，2，3，$P(X=1)=\frac{C_6^1\cdot C_2^2}{C_8^3}=\frac{3}{28}$，$P(X=2)=\frac{C_6^2\cdot C_2^1}{C_8^3}=\frac{15}{28}$，$P(X=3)=\frac{C_6^3\cdot C_2^0}{C_8^3}=\frac{5}{14}$，

则 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{14}$

………………………………………… 10 分

$E(X)=1\times\frac{3}{28}+2\times\frac{15}{28}+3\times\frac{5}{14}=\frac{9}{4}$. ………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)在△ABC 中，$\angle A=90°$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC$.

因为 $DF\perp BC$，所以 $S_{\triangle CDF}=\frac{1}{2}CD\times DF$. ………………………………………… 2 分

因为△ABC 的面积等于△CDF 的面积的$\sqrt{2}$倍，

所以$\frac{1}{2}AB\times AC=\sqrt{2}\times\frac{1}{2}CD\times DF$，

因为 $DF=AC$，所以$\sqrt{2}CD=AB$，………………………………………… 4 分

因为 D 为 BC 的中点，所以 $BC=\sqrt{2}AB$.

在直角△ABC 中，因为 $\cos\angle ABC=\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$\angle ABC=45°$. ………………………………………… 6 分

(2)设 $AC=k$，因为$\angle A=90°$，$\angle ABC=30°$，$CD=3BD$，$DF=AC$，

所以 $DF=k$，$BD=\frac{1}{2}k$，$CD=\frac{3}{2}k$，………………………………………… 8 分

因为 $DF\perp BC$，所以 $\tan\angle CFD=\frac{\frac{3}{2}k}{k}=\frac{3}{2}$，$\tan\angle BFD=\frac{\frac{1}{2}k}{k}=\frac{1}{2}$，………………………………………… 10 分

所以 $\tan\angle CFB=\tan(\angle CFD+\angle BFD)$

$=\frac{\tan\angle CFD+\tan\angle BFD}{1-\tan\angle CFD\tan\angle BFD}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}}=8$. ………………………………………… 2 分

20.【解析】(1)因为 $BC=1$，$CC_1=2$，$\angle BCC_1=\frac{\pi}{3}$，所以 $BC_1=\sqrt{1+4-2\times1\times2\times\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

所以 $BC^2+BC_1^2=CC_1^2$，所以 $BC_1\perp BC$.

因为 $AB\perp$ 侧面 BB_1C_1C，所以 $AB\perp BC_1$. 又因为 $AB\cap BC=B$，AB，$BC\subset$ 平面 ABC，

所以直线 $C_1B\perp$ 平面 ABC，…………………………………………………………………… 2 分

以 B 为原点，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BC_1}$ 和 $\overrightarrow{BA}$ 的方向分别为 x，y，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，

则知点 $A(0,0,2)$，$B_1(-1,\sqrt{3},0)$，$E(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$A_1(-1,\sqrt{3},2)$.

设平面 AB_1E 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{AB_1}=(-1,\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{AE}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-2)$，

因为 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}-x_1+\sqrt{3}y_1-2z_1=0,\\ \frac{1}{2}x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}y_1-2z_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=\sqrt{3}$，则 $x_1=1$，$z_1=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$.

设平面 A_1B_1E 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=(0,0,-2)$，$\overrightarrow{A_1E}=(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-2)$，

因为 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}-2z=0,\\ \frac{3}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-2z=0,\end{cases}$ 令 $y=\sqrt{3}$，则 $x=1$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},0)$. ……………… 4 分

因为 $|\boldsymbol{m}|=2$，$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{5}$，$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=4$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

设二面角 $A-EB_1-A_1$ 为 α，则 $\cos\alpha=\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

所以二面角 $A-EB_1-A_1$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$. …………………………………………………………………… 6 分

(2)假设存在点 $F(x,y,z)$，因为 $\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CA}$，$\lambda\in[0,1]$，

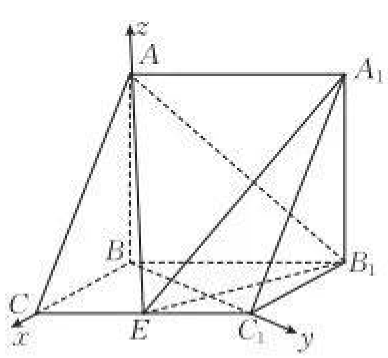
所以 $(x-1,y,z)=\lambda(-1,0,2)$，所以 F 的坐标为 $(1-\lambda,0,2\lambda)$.

所以 $\overrightarrow{EF}=(\frac{1}{2}-\lambda,-\frac{\sqrt{3}}{2},2\lambda)$. …………………………………………………………………… 8 分

由(1)知平面 A_1B_1E 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},0)$，

所以 $\frac{5\sqrt{17}}{34}=\frac{|\frac{1}{2}-\lambda-\frac{3}{2}|}{2\sqrt{(\frac{1}{2}-\lambda)^2+\frac{3}{4}+4\lambda^2}}$，得 $\lambda=\frac{1}{4}$ 或 $\lambda=\frac{8}{27}$，………………………… 10 分

所以 $CF=\frac{\sqrt{5}}{4}$ 或 $CF=\frac{8\sqrt{5}}{27}$. …………………………………………………………………… 12 分



21.【解析】(1)易知 $a=1$，由 $\frac{c}{a}=2$，得 $c=2$，$\therefore b^2=c^2-a^2=3$. ………………………………… 1 分

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，直线 l：$x=my+2$，

由$\begin{cases}x=my+2,\\x^2-\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$消去 x，得$(3m^2-1)y^2+12my+9=0$，则 $y_1+y_2=\dfrac{-12m}{3m^2-1}$，$y_1y_2=\dfrac{9}{3m^2-1}$. ………… 2分

$S_{\triangle BPQ}=\dfrac{1}{2}|BF|\cdot|y_1-y_2|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(-12m)^2}{(3m^2-1)^2}-\dfrac{4\times9}{(3m^2-1)}}=\dfrac{3\sqrt{m^2+1}}{|3m^2-1|}$.

$\because S_{\triangle BPQ}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\dfrac{3\sqrt{m^2+1}}{|3m^2-1|}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，整理得 $9m^4-8m^2-1=0$.

解得 $m^2=1$ 或 $m^2=-\dfrac{1}{9}$（舍去），∴直线 l：$x\pm y-2=0$. ………………………………………… 4分

(2)设 AM，BN 与 y 轴分别交于 S，T，$A(-1,0)$，$B(1,0)$.

设 $S(0,y_0)$，$\therefore T(0,3y_0)$，$\therefore k_{AM}=k_{AS}=\dfrac{y_0}{1}=y_0$，$k_{BN}=k_{BT}=-3y_0$，$\therefore k_{BN}=-3k_{AM}$.

设 $M(x_3,y_3)$，则 $k_{MA}\cdot k_{MB}=\dfrac{y_3}{x_3+1}\cdot\dfrac{y_3}{x_3-1}=\dfrac{y_3^2}{x_3^2-1}=\dfrac{b^2}{a^2}=3$，来源：高三答案公众号

$\therefore k_{BN}\cdot k_{BM}=\dfrac{3}{k_{MA}}\cdot k_{BN}=-9$. ………………………………………………………………… 6分

设直线 MN 的方程为 $x=my+t$，$N(x_4,y_4)$，

$\begin{cases}x=my+t,\\3x^2-y^2=3,\end{cases}$ $3(m^2y^2+2mty+t^2)-y^2=3$，$\therefore(3m^2-1)y^2+6mty+3t^2-3=0$，

$\therefore y_3+y_4=-\dfrac{6mt}{3m^2-1}$，$y_3y_4=\dfrac{3t^2-3}{3m^2-1}$，

$\therefore k_{BM}\cdot k_{BN}=\dfrac{y_3}{x_3-1}\cdot\dfrac{y_4}{x_4-1}=\dfrac{y_3y_4}{(my_3+t-1)(my_4+t-1)}=-9$. ……………………………………… 8分

$9[m^2y_3y_4+m(t-1)(y_3+y_4)+(t-1)^2]+y_3y_4=0$，

$\therefore(9m^2+1)y_3y_4+9m(t-1)(y_3+y_4)+9(t-1)^2=0$，

$\therefore(9m^2+1)\cdot\dfrac{3t^2-3}{3m^2-1}-9m(t-1)\cdot\dfrac{-6mt}{3m^2-1}+9(t-1)^2=0$，

∵直线 MN 不过 $B(1,0)$，$\therefore t\neq1$，$\therefore(9m^2+1)(t+1)-18m^2t+3(t-1)(3m^2-1)=0$.

$\therefore 9m^2t+9m^2+t+1-18m^2t+9m^2t-3t-9m^2+3=0$，得 $t=2$. ∴直线 MN 过定点$(2,0)$. ………… 12分

22.【解析】(1)由题知 $f'(x)=(x-1)\sin x$，

当 $x\in(-\dfrac{\pi}{2},0)\cup(1,\dfrac{\pi}{2})$时，$f'(x)>0$，当 $x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$的单调增区间为$(-\dfrac{\pi}{2},0)$，$(1,\dfrac{\pi}{2})$，单调减区间为$(0,1)$. ……………………………… 2分

(2)由(1)易知$-\dfrac{\pi}{2}<x_1<0<x_2<1<x_3<\dfrac{\pi}{2}$，

先证明 $x_1+x_2>0$，证明如下：

要证明 $x_1+x_2>0$，即证 $0>x_1>-x_2>-\dfrac{\pi}{2}$，即证 $f(x_1)>f(-x_2)$，由于 $f(x_1)=f(x_2)$，即证 $f(x_2)-f(-x_2)>0$，构造函数 $F(x)=f(x)-f(-x)=2\sin x-2x\cos x$，$x\in(0,1)$，则 $F'(x)=2x\sin x>0$，

所以 $F(x)$在$(0,1)$上单调递增，所以 $F(x)>F(0)=0$ 得证. ……………………………………………… 6分

再证明 $x_2+x_3<2$，证明如下：

要证明 $x_2+x_3<2$，即证 $0<x_2<2-x_3<1$，即证 $f(x_2)>f(2-x_3)$，由于 $f(x_3)=f(x_2)$，即证 $f(x_3)-f(2-x_3)>0$，构造函数 $G(x)=f(x)-f(2-x)=\sin x+(1-x)\cos x-\sin(2-x)-(x-1)\cos(2-x)$，$x\in(1,\dfrac{\pi}{2})$，$G'(x)=(x-1)[\sin x-\sin(2-x)]>0$，

所以 $G(x)$在$(1,\dfrac{\pi}{2})$上单调递增，所以 $G(x)>G(1)=0$ 得证，

所以$-2x_1-2x_2<0$，$x_2+x_3<2$，相加得 $2x_1+x_2>x_3-2$. ……………………… 2分