高三数学考试参考答案

1. D 【解析】本题考查等差数列,考查数学运算的核心素养.

因为公差 $d=\frac{a_9-a_3}{9-3}=\frac{1-13}{6}=-2$,所以 $a_4=a_3+d=11$.

2. D 【解析】本题考查集合的交集,考查数学运算的核心素养.

因为 $A=(-3,2)$,$B=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$,所以 $A\cap B=(-3,0)\cup(1,2)$.

3. A 【解析】本题考查空间中的垂直关系,考查空间想象能力与逻辑推理的核心素养.

当四面体 $ABCD$ 为正四面体时,AB 与 CD 垂直,A 正确,C 错误. 若 A 在平面 BCD 内的射影是 B,则 AB 与平面 BCD 垂直,B 错误. 平面 ABC 与平面 BCD 可能垂直,D 错误.

4. C 【解析】本题考查函数的奇偶性,考查数学抽象与逻辑推理的核心素养.

设 $g(x)=f(2^x-2^{-x})$,则 $g(-x)=f(2^{-x}-2^x)=-f(2^x-2^{-x})=-g(x)$,则 $y=f(2^x-2^{-x})$是奇函数.

5. B 【解析】本题考查平面向量的数量积,考查数学运算的核心素养.

依题意可得$(\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\frac{13}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{7}{2}\boldsymbol{b}^2=0$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{5}{13}$.

6. A 【解析】本题考查导数的几何意义及直线与圆,考查数学运算与直观想象的核心素养.

$y'=4x^3$,则 l 的方程为 $y-1=4(x-1)$,即 $y=4x-3$,因为圆心 $C(5,0)$到 l 的距离为 $\sqrt{17}$,所以$|PQ|$的最小值为 $\sqrt{17}-\sqrt{\frac{17}{4}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

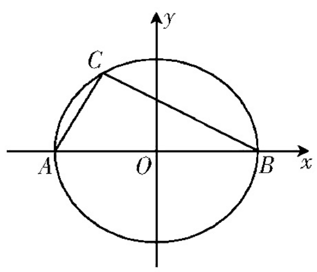
7. C 【解析】本题考查解三角形与充分必要条件的判定,考查逻辑推理的核心素养.

由正弦定理,题中的不等式等价于$(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)>0$. 假设$\triangle ABC$ 为钝角三角形,则由余弦定理得 $a^2+b^2-c^2$,$b^2+c^2-a^2$,$c^2+a^2-b^2$ 这三个代数式中有两个为正,一个为负,可得$(a^2+b^2-c^2)\cdot(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)<0$,所以$\triangle ABC$ 为锐角三角形. 若$\triangle ABC$ 为锐角三角形,则 $a^2+b^2-c^2$,$b^2+c^2-a^2$,$c^2+a^2-b^2$ 这三个代数式均为正,所以$(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)>0$. 故"$(\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C)(\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A)(\sin^2C+\sin^2A-\sin^2B)>0$"是"$\triangle ABC$ 为锐角三角形"的充要条件.

8. D 【解析】本题考查椭圆的性质,考查直观想象与数学运算的核心素养.

设椭圆 D 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,如图,点 C 的横坐标为$-(\frac{7}{2}-3\cos 60^\circ)=-2$,纵坐标为 $3\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,因为 $AB=7$,所以 $a=\frac{7}{2}$,

将点 C 的坐标代入$\frac{x^2}{(\frac{7}{2})^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,得$\frac{16}{49}+\frac{27}{4b^2}=1$,解得 $b^2=\frac{9\times49}{44}$,



故 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{9}{11}}=\frac{\sqrt{22}}{11}$.

9. BD 【解析】本题考查抛物线的定义(焦半径),考查直观想象与数学运算的核心素养.

设焦点为 F,则$|MF|=2+\frac{p}{2}=8|2p+1-2|$,解得 $p=\frac{4}{11}$或$\frac{20}{31}$.

10. AC 【解析】本题考查圆锥的侧面积与基本不等式的应用,考查逻辑推理与数学建模的核心素养.

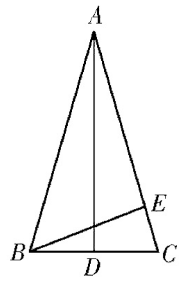
设 $AB=x$,$AD=y$,则圆锥 M 的侧面积为 $2\pi x$,圆锥 N 的侧面积为 $8\pi y$,则 $2\pi x+8\pi y=xy$,

则$\frac{1}{y}+\frac{4}{x}=\frac{1}{2\pi}$,则$\frac{1}{y}+\frac{4}{x}=\frac{1}{2\pi}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{y}\cdot\frac{4}{x}}$,得 $xy\geqslant64\pi^2$,当且仅当$\frac{1}{y}=\frac{4}{x}$,即 $x=4y$,$AB=4AD$ 时,等号成立,所以矩形 $ABCD$ 的面积的最小值为 $64\pi^2$,此时 $AB=4AD$,所以 B 错误,C 正确.

矩形 $ABCD$ 的周长为 $2(x+y)=4\pi(\frac{1}{y}+\frac{4}{x})(x+y)=4\pi(5+\frac{x}{y}+\frac{4y}{x})\geqslant4\pi(5+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{4y}{x}})=36\pi$,

当且仅当$\frac{x}{y}=\frac{4y}{x}$,即$x=2y$,$AB=2AD$时,等号成立,所以矩形$ABCD$的周长的最小值为36π,此时$AB=2AD$,所以A正确,D错误.

11. ABD 【解析】本题考查三角恒等变换与解三角形,考查直观想象与数学运算的核心素养.



设$\angle BAC=\theta$,则$\theta+2\theta+2\theta=180°$,解得$\theta=36°$,则$\angle DAC=18°$,

则$\cos\angle DAC=\cos 18°=\cos(360°-18°)=\cos 342°=\frac{AD}{AC}$,A正确.

$\frac{AD}{CD}=\tan 2\theta=\tan 72°$,$\frac{\cos 27°+\sin 27°}{\cos 27°-\sin 27°}=\frac{1+\tan 27°}{1-\tan 27°}=\tan(27°+45°)=\tan 72°$,B正确.

依题意可设$BC=\sqrt{5}-1$,则$AB=AC=2$,则由余弦定理得$\cos\angle BAC=\frac{2^2+2^2-(\sqrt{5}-1)^2}{2\times2\times2}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$,过$B$作$BE\perp AC$,垂足为$E$,则$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的投影向量为$\overrightarrow{AE}=\cos\angle BAC\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\overrightarrow{AC}$,C错误.

由图可知$\cos 2\theta=\cos(\pi-\theta-2\theta)$,则$2\cos^2\theta-1=-\cos(\theta+2\theta)=-\cos\theta\cos 2\theta+\sin\theta\sin 2\theta=-\cos\theta(2\cos^2\theta-1)+2\sin^2\theta\cos\theta$,设$\cos\theta=x$,则$2x^2-1=-x(2x^2-1)+2(1-x^2)x$,整理得$4x^3+2x^2-3x=1$,D正确.

12. ACD 【解析】本题考查函数与导数的综合,考查数学抽象与逻辑推理的核心素养.

因为$\forall x,y\in\mathbf{R}$,$f(xy)=2f(x)f(y)-x^2y^2$,所以$f(x)$的解析式可能为$f(x)=x^2$,也可能为$f(x)=-\frac{1}{2}x^2$,所以A,C都正确.

若$f(x)=-\frac{1}{2}x^2$,则$g'(x)=\frac{x^2-2x}{2e^x}$,当$x\in(2,+\infty)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,所以B错误.

若$f(x)=-\frac{1}{2}x^2$,则$h(x)=-\frac{1}{2}x^2+\sin x$,则$h'(x)=-x+\cos x$,$h'(x)$的导函数$h''(x)=-1-\sin x\leqslant0$,所以$h'(x)$单调递减,因为$h'(0)h'(\frac{\pi}{2})<0$,所以存在唯一的$m\in(0,\frac{\pi}{2})$,使得$h'(m)=0$,则当$x<m$时,$h(x)$单调递增,当$x>m$时,$h(x)$单调递减.因为$h(0)=0$,$h(2)<0$,所以$h(x)=f(x)+\sin x$可能只有两个非负零点,D正确.

13. $3+2i$(本题答案不唯一,只要$a+bi(a,b\in\mathbf{R})$满足$a^2-b^2=5$,$b\neq0$即可,例如$3-2i$) 【解析】本题考查复数的实部、虚部与复数的运算,考查数学运算的核心素养.

设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则$z^2=a^2-b^2+2abi$,依题意可得$a^2-b^2=5$,$b\neq0$.

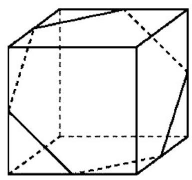
14. 2;1.2 【解析】本题考查随机变量的期望与方差,考查数学运算的核心素养.

$E(X)=(1+2)\times0.4+4\times0.2=2$,$D(X)=(1-2)^2\times0.4+(2-2)^2\times0.4+(4-2)^2\times0.2=1.2$.

15. $\frac{41}{120}$ 【解析】本题考查古典概型与排列组合的应用,考查应用意识与逻辑推理的核心素养.

要使得(2,3)的状态发生改变,则需要按(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3)这五个开关中的一个,要使得(4,1)的状态发生改变,则需要按(3,1),(4,1),(4,2)这三个开关中的一个,所以要使得(2,3)和(4,1)的最终状态都未发生改变,则需按其他八个开关中的两个或(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3)中的两个或(3,1),(4,1),(4,2)中的两个,故所求概率为$\frac{A_8^2+A_5^2+A_3^2}{A_{16}^2}=\frac{41}{120}$.

16. 108 【解析】本题考查翻折问题、多面体的体积,考查空间想象能力、直观想象与数学运算的核心素养.


图(3)

将平面图形折叠并补形得到如图(3)所示的正方体,该七面体为正方体沿着图中的六边形截面截去一部分后剩下的另一部分,易得其体积为正方体体积的一半,即$\frac{1}{2}\times6^3=108\ cm^3$.

17. 解:(1)取C_1C的中点H,

连接A_1B,A_1G,BH,GH,即截面BA_1GH为要求作的截面. ………………………………… 1分

理由如下：

因为 E,F 分别为 A_1B_1,BB_1 的中点，所以 $A_1B/\!/EF$，又 $A_1B\not\subset$ 平面 C_1EF，$EF\subset$ 平面 C_1EF，所以 $A_1B/\!/$ 平面 C_1EF. ………………………………………………………………………… 2 分

在正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 中，因为 G 为 C_1D_1 的中点，所以 $A_1E/\!/GC_1$，且 $A_1E=GC_1$，

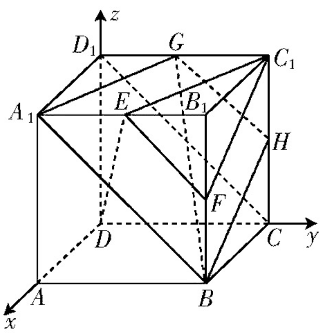
所以四边形 A_1EC_1G 为平行四边形，所以 $A_1G/\!/EC_1$，同上可得 $A_1G/\!/$ 平面 C_1EF. …………………… 3 分

又 $A_1B\cap A_1G=A_1$，所以平面 $BA_1G/\!/$ 平面 C_1EF. ………………………………………………… 4 分

连接 D_1C，易证 $GH/\!/D_1C$，$A_1B/\!/D_1C$，则 $GH/\!/A_1B$，

所以 A_1,B,H,G 四点共面，从而截面 BA_1GH 为要求作的截面. ………………………………… 5 分

(2)如图，以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$，$C_1(0,2,2)$，$E(2,1,2)$，$F(2,2,1)$，



$\overrightarrow{EC_1}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{EF}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{DE}=(2,1,2)$. ……………………………… 6 分

设平面 C_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{EC_1}\cdot\boldsymbol{m}=-2x+y=0,\\ \overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{m}=y-z=0,\end{cases}$ ……… 7 分

令 $x=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,2,2)$，…………………………………………………………… 8 分

所以 $\cos\langle\overrightarrow{DE},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{DE}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{8}{9}$. ………………………………………………… 9 分

故直线 DE 与平面 C_1EF 所成角的正弦值为 $\dfrac{8}{9}$. ……………………………………………… 10 分

评分细则：

【1】第(1)问中，若得到的截面为 $\triangle A_1BG$，且证明了截面 $A_1BG/\!/$ 平面 C_1EF，第(1)问只得 3 分.

【2】第(2)问中，平面 C_1EF 的法向量不唯一，只要与 $\boldsymbol{m}=(1,2,2)$ 共线即可.

18. 解：(1)依题意可得 $\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\dfrac{\pi}{6}\omega+\dfrac{\pi}{3},\\ \pi\omega+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$ $(k\in\mathbf{Z})$，………………………………………… 2 分

解得 $1+12k\leqslant\omega\leqslant\dfrac{7}{6}+2k(k\in\mathbf{Z})$. ……………………………………………………… 3 分

当 $k=0$ 时，$1\leqslant\omega\leqslant\dfrac{7}{6}$；……………………………………………………………… 4 分

当 $k\geqslant1$ 时，不等式 $1+12k\leqslant\omega\leqslant\dfrac{7}{6}+2k$ 无解. ………………………………………… 5 分

故 ω 的最大值为 $\dfrac{7}{6}$. …………………………………………………………………… 6 分

(2)因为 $f(x)$ 的图象关于点 $(\dfrac{3\pi}{2},0)$ 中心对称，所以 $\dfrac{3\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$. …………………… 8 分

因为 $1\leqslant\omega\leqslant\dfrac{7}{6}$，所以 $\omega=\dfrac{10}{9}$，……………………………………………………… 9 分

则 $f(x)=4\sin(\dfrac{10}{9}x+\dfrac{\pi}{3})$，当 $x\in[-\dfrac{9\pi}{20},m]$ 时，$\dfrac{10}{9}x+\dfrac{\pi}{3}\in[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{10}{9}m+\dfrac{\pi}{3}]$，……………… 10 分

则 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{10}{9}m+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{7\pi}{6}$，…………………………………………………………… 11 分

解得 $\dfrac{3\pi}{20}\leqslant m\leqslant\dfrac{3\pi}{4}$，所以 m 的取值范围是 $[\dfrac{3\pi}{20},\dfrac{3\pi}{4}]$. ……………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问中，得到 $1+12k\leqslant\omega\leqslant\dfrac{7}{6}+2k(k\in\mathbf{Z})$ 后，还可以由 $\dfrac{\pi}{\omega}\geqslant\pi-\dfrac{\pi}{6}$，得 $0<\omega\leqslant\dfrac{6}{5}$，所以 $1\leqslant\omega\leqslant\dfrac{7}{6}$，故 ω 的最大值为 $\dfrac{7}{6}$.

【2】第(2)问中,若得到$\frac{3\pi}{20}\leqslant m\leqslant\frac{3\pi}{4}$,但最后没有写成区间形式,不扣分.

19. 解:(1)由题意可知$\{a_n\}$是公差为 4 的等差数列,…………………………………………………… 1 分

因为$a_1=49-2\times4=41$, …………………………………………………………………………………… 2 分

所以$a_n=41+4(n-1)=4n+37(n=1,2,\cdots,10)$. ……………………………………………………… 3 分

观众座位的总个数为$\frac{(41+40+37)\times10}{2}=590$. ………………………………………………………… 4 分

(2)设第 n 排座位的门票价格为 c_n 元/张,则$\{c_n\}$为等比数列, ……………………………………… 5 分

$c_n=c_1\cdot(\frac{1}{1.1})^{n-1}$,由 $c_{10}=c_1\cdot(\frac{1}{1.1})^9=500$,得 $c_1=500\times1.1^9$,

因此 $c_n=500\times1.1^{10-n}(n=1,2,\cdots,10)$. ………………………………………………………………… 6 分

记门票售罄该场文艺演出的门票总收入为 T 元,则 $T=a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3+\cdots+a_{10}c_{10}$,$\frac{T}{500}=41\times1.1^9+45\times1.1^8+49\times1.1^7+\cdots+77\times1.1^0$, …………………………………………………………………………… 7 分

则$\frac{T}{500\times1.1}=41\times1.1^8+45\times1.1^7+49\times1.1^6+\cdots+\frac{77}{1.1}$, …………………………………… 8 分

两式相减得$\frac{T}{500}(1-\frac{1}{1.1})=41\times1.1^9+4\times(1.1^8+1.1^7+\cdots+1.1^0)-70$, ………………………… 9 分

则$\frac{T}{11\times500}=41\times1.1^9+4\times\frac{1-1.1^9}{1-1.1}-70=81\times1.1^9-110$, ……………………………… 10 分

所以 $T=81\times5000\times1.1^{10}-110\times11\times500=81\times5000\times2.594-110\times11\times500=445570$,

故若门票售罄,则该场文艺演出的门票总收入为 445570 元. ……………………………………………… 12 分

评分细则:

【1】第(1)问中,得到"$\{a_n\}$是等差数列",但未写公差,不扣分;未写"$(n=1,2,\cdots,10)$",但得到"$a_n=4n+37$",不扣分.

【2】第(2)问中,得到"$T=81\times5000\times1.1^{10}-110\times11\times500=81\times5000\times2.594-110\times11\times500=445570$",但未写"故该场文艺汇演的门票总收入为 445570 元",不扣分.

20. 解:(1)$\bar{x}=\frac{3+3+4+5+5+6+6+8}{8}=5$,$\bar{y}=\frac{10+12+13+18+19+21+24+27}{8}=18$. ……………… 1 分

$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=16+12+5+0+0+3+6+27=69$, ……………………………………………… 2 分

$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2=4+4+1+0+0+1+1+9=20$,$\sum\limits_{i=1}^{8}(y_i-\bar{y})^2=64+36+25+0+1+9+36+81=252$, … 3 分

代入公式可得相关系数 $r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{8}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{69}{\sqrt{20}\times\sqrt{252}}=\frac{23}{4\sqrt{35}}\approx0.97$. ……………… 4 分

由于$|r|>0.75$ 且 r 非常接近 1,所以 y 与 x 具有很强的线性相关关系. ……………………………… 5 分

经计算可得 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{69}{20}=3.45$, ………………………………………………………… 6 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=18-3.45\times5=0.75$.所以所求线性回归方程为 $\hat{y}=3.45x+0.75$. ………………… 7 分

(2)(i)当 $x=10$ 时,$\hat{y}=35.25$,所以预计能带动的消费达 35.25 百万元. …………………………………… 9 分

(ii)因为$\frac{|30-35.25|}{35.25}>10\%$,所以发放的该轮消费券助力消费复苏不是理想的. ………………… 11 分

发放消费券只是影响消费的其中一个因素,还有其他重要因素,比如:A 城市经济发展水平不高,居民的收入水平直接影响了居民的消费水平,A 城市人口数量有限、商品价格水平、消费者偏好、消费者年龄构成等因素一定程度上影响了消费总量(只要写出一个原因即可). …………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问中，x,y 的平均数只求对了一个，不给分.

【2】第(2)问的第(ii)问涉及的其他因素很多，比较主观，考生只要答出一个比较合理的原因即可.

21.(1)解：$f'(x)=12x^3-\dfrac{12}{x^4}=\dfrac{12(x^7-1)}{x^4}$. …………………………………… 1分

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；…………………………………… 2分

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. …………………………………… 3分

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=7$. …………………………………… 4分

(2)证明：(i)由(1)可知 $0<x_1<1<x_2$， …………………………………… 5分

$x_1^4+(2-x_1)^4-x_1^3-(2-x_1)^3=x_1^3(x_1-1)+(2-x_1)^3(1-x_1)=(x_1-1)[x_1^3-(2-x_1)^3]$， ………… 6分

因为 $0<x_1<1$，所以 $x_1-1<0$，$0<x_1<2-x_1$，则 $(x_1-1)[x_1^3-(2-x_1)^3]>0$，所以 $x_1^3+(2-x_1)^3<x_1^4+(2-x_1)^4$. …………………………………… 7分

(ii)由 $0<x_1<1<x_2$ 得 $1<2-x_1<2$，要证 $x_1+x_2>2$，只需证 $x_2>2-x_1$，只需证 $f(x_2)>f(2-x_1)$，即证 $f(x_1)>f(2-x_1)$. …………………………………… 8分

令函数 $g(x)=f(x)-f(2-x)(0<x<1)$，

则 $g'(x)=f'(x)+f'(2-x)=12x^3-\dfrac{12}{x^4}+12(2-x)^3-\dfrac{12}{(2-x)^4}$， …………………………………… 9分

所以 $g'(x)=12[x^3+(2-x)^3-\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{1}{(2-x)^4}]<12[x^4+(2-x)^4-\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{1}{(2-x)^4}]=12[x^4+(2-x)^4-\dfrac{x^4+(2-x)^4}{(2x-x^2)^4}]=12[x^4+(2-x)^4]\cdot\dfrac{(2x-x^2)^4-1}{(2x-x^2)^4}$， …………………………………… 10分

因为 $2x-x^2=x(2-x)<\dfrac{(x+2-x)^2}{4}=1$，所以 $g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减. ………… 11分

所以 $g(x)>g(1)=0$，则 $f(x)>f(2-x)(0<x<1)$，故 $x_1+x_2>2$. …………………………………… 12分

评分细则：

【1】第(1)问中，考生得到"当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$"，但没有写单调递减，不扣分；考生得到"当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$"，但没有写单调递增，同样不扣分.

【2】第(2)问的第(ii)问未写"由 $0<x_1<1<x_2$ 得 $1<2-x_1<2$"，直接得到"$f(x_2)>f(2-x_1)$"，扣1分.

22.(1)解：设 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，不妨设右焦点为 $(c,0)$，渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$. …… 1分

右焦点到渐近线的距离 $d=\dfrac{\dfrac{bc}{a}}{\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2}+1}}=b=\sqrt{2}$. …………………………………… 2分

因为 C 为等轴双曲线，所以 $a=b=\sqrt{2}$. …………………………………… 3分

所以 C 的方程为 $x^2-y^2=2$. …………………………………… 4分

(2)证明：设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$. 由 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|\cdot\cos 45^\circ$，得 $x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|OP|\cdot|OQ|$，

…………………………………… 5分

且 $|OP|^2=x_1^2+y_1^2=2x_1^2-2=2y_1^2+2$，$|OQ|^2=x_2^2+y_2^2=2x_2^2-2=2y_2^2+2$，…………………… 6分

所以 $y_1^2y_2^2=\dfrac{1}{2}|OP|^2\cdot|OQ|^2+x_1^2x_2^2-\sqrt{2}x_1x_2\cdot|OP|\cdot|OQ|$，…………………… 7分

则 $\dfrac{|OP|^2-2}{2}\cdot\dfrac{|OQ|^2-2}{2}=\dfrac{1}{2}|OP|^2\cdot|OQ|^2+\dfrac{|OP|^2+2}{2}\cdot\dfrac{|OQ|^2+2}{2}-\sqrt{2}x_1x_2\cdot|OP|\cdot|OQ|$，

即 $|OP|^2\cdot|OQ|^2+2|OP|^2+2|OQ|^2=2\sqrt{2}x_1x_2\cdot|OP|\cdot|OQ|$， …………………………………… 9分

平方后得$(|OP|^2\cdot|OQ|^2+2|OP|^2+2|OQ|^2)^2=8\times\dfrac{|OP|^2+2}{2}\cdot\dfrac{|OQ|^2+2}{2}\cdot|OP|^2\cdot|OQ|^2$，…… 10分

等式两边同时除以$|OP|^4\cdot|OQ|^4$，得$(1+\dfrac{2}{|OP|^2}+\dfrac{2}{|OQ|^2})^2=2(1+\dfrac{2}{|OP|^2})(1+\dfrac{2}{|OQ|^2})$，………… 11分

即$\dfrac{4}{|OP|^4}+\dfrac{4}{|OQ|^4}=1$，即$\dfrac{1}{|OP|^4}+\dfrac{1}{|OQ|^4}=\dfrac{1}{4}$.

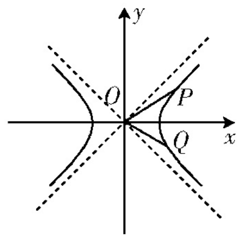
所以$\dfrac{1}{|OP|^4}+\dfrac{1}{|OQ|^4}$是定值，且该定值为$\dfrac{1}{4}$. …………………………………………………………………… 12分

评分细则：

【1】第(1)问中，C的方程写为“$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$”，不扣分.

【2】第(2)问还可以这样解答：

由$\angle POQ=\dfrac{\pi}{4}$，得$P,Q$必在$C$的同一支上且位居$x$轴的两侧，不妨设$P,Q$在$C$的右支上，如图所示. …………………………………………………………………… 5分



令$k_{OP}=k(0<k<1)$，则$k_{OQ}=\dfrac{k-1}{k+1}$. …………………………………………… 7分

由$\begin{cases}y=kx,\\x^2-y^2=2,\end{cases}$得$x^2=\dfrac{2}{1-k^2}$，…………………………………………………… 8分

则$|OP|^2=(1+k^2)x^2=\dfrac{2(1+k^2)}{1-k^2}$，………………………………………………………………… 9分

以$\dfrac{k-1}{k+1}$代k得$|OQ|^2=\dfrac{2[1+(\frac{k-1}{k+1})^2]}{1-(\frac{k-1}{k+1})^2}=\dfrac{1+k^2}{k}$，…………………………………………………… 10分

故$\dfrac{1}{|OP|^4}+\dfrac{1}{|OQ|^4}=\dfrac{(1-k^2)^2}{4(1+k^2)^2}+\dfrac{4k^2}{4(1+k^2)^2}=\dfrac{1}{4}$(为定值). …………………………………………… 12分