常州市教育学会学业水平监测

高三数学

2022 年 11 月

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号徐黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将答题卡交回．

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|\sqrt{2-x}\leqslant 1\}$，$B=\{x||x-2|\leqslant 1\}$，则集合 $(C_UA)\cap B=$

A．$\varnothing$　　B．$\{x|2<x\leqslant 3\}$　　C．$\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$　　D．$\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$

2．记△ABC 的内角为 A，B，C，则“$A=B$”是“$\sin A=\sin B$”的

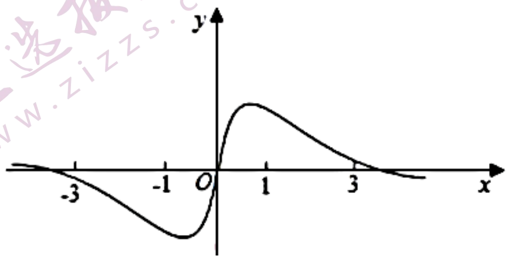
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分又不必要条件

3．已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>0$，且 $a_2+a_3=6$，$a_3a_4=a_6$，则 $a_4=$

A．8　　B．12　　C．16　　D．20

4．如图，该图象是下列四个函数中的某个函数的大致图象，则该函数是



A．$y=\dfrac{-x^3+3x}{x^2+1}$　　B．$y=\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$　　C．$y=\dfrac{2x\cos x}{x^2+1}$　　D．$y=\dfrac{2\sin x}{x^2+1}$

5．若$(1-ax+x^2)(1-x)^8$的展开式中含x^2的项的系数为21，则$a=$

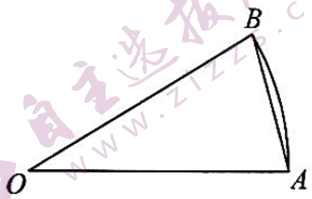
A．-3　　B．-2　　C．-1　　D．1

6．设随机变量$\xi\sim N(\mu，4)$，函数$f(x)=x^2+2x-\xi$没有零点的概率是0.5，则$P(1<\xi\leqslant3)=$

附：随机变量ξ服从正态分布$N(\mu，\sigma^2)$，$P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)=0.6827$，$P(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma)=0.9545$．

A．0.1587　　B．0.1359　　C．0.2718　　D．0.3413

7．如图是一个近似扇形的湖面，其中$OA=OB=r$，弧AB的长为$l(l<r)$．为了方便观光，欲在A，B两点之间修建一条笔直的走廊AB．若当$0<x<\frac{1}{2}$时，$\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$，则$\frac{AB}{l}$的值约为



A．$2-\frac{r^2}{12l^2}$　　B．$2-\frac{l^2}{12r^2}$　　C．$1-\frac{r^2}{24l^2}$　　D．$1-\frac{l^2}{24r^2}$

8．设$a=e^{0.2}$，$b=\frac{5}{4}$，$c=\ln\frac{6e}{5}$，则

A．$a<b<c$　　B．$c<b<a$　　C．$c<a<b$　　D．$a<c<b$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9．已知等差数列$\{a_n\}$的公差$d<0$，且$a_1{}^2=a_{11}{}^2$．$\{a_n\}$的前n项和记为S_n，若S_k是S_n的最大值，则k的可能值为

A．5　　B．6　　C．10　　D．11

10．记△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若a，b，c成等比数列，则

A．B的最小值为$\frac{\pi}{3}$　　B．$\cos(A-C)+\cos B=1-\cos 2B$

C．$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}=\frac{1}{\sin B}$　　D．$\frac{b}{a}$的取值范围为$(0，\frac{\sqrt{5}+1}{2})$

11．已知函数 $f(x)$及其导函数 $f'(x)$定义域均为 **R**，若 $f(-x)=-f(x)$，$f(x+2)=f(2-x)$对任意实数 x 都成立，则

A．函数 $f(x)$是周期函数

B．函数 $f'(x)$是偶函数

C．函数 $f'(x)$的图象关于(2，0)中心对称

D．函数 $f(2-x)$与 $f(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称

12．在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以 8 个顶点中的任意 3 个顶点作为顶点的三角形叫做 $K-$三角形，12 条棱中的任意 2 条叫做棱对，则

A．一个 $K-$三角形在它是直角三角形的条件下，它又是等腰直角三角形的概率为$\frac{1}{3}$

B．一个 $K-$三角形在它是等腰三角形的条件下，它又是等边三角形的概率为$\frac{1}{4}$

C．一组棱对中两条棱所在直线在互相平行的条件下，它们的距离为$\sqrt{2}$的概率为$\frac{1}{3}$

D．一组棱对中两条棱所在直线在互相垂直的条件下，它们异面的概率为$\frac{1}{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．函数 $f(x)=\tan(\sin x)$的最小正周期为__________．

14．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，过点 A 作平面 A_1BD 的垂线，垂足为 H，则直线 AH 与平面 DCC_1D_1 所成角的正弦值为__________．

15．在△ABC 中，$2\sin\angle ACB=\sqrt{3}\sin\angle ABC$，$AB=2\sqrt{3}$，$BC$ 边上的中线长为$\sqrt{13}$，则△ABC 的面积为__________．

16．将数列$\{3n\}$与$\{2^n\}$的所有项放在一起，按从小到大的顺序排列得到数列$\{a_n\}$，则 $a_{684}=$__________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．(本小题满分 10 分)

已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 2，前 n 项和为 S_n，且 S_1，S_2，S_4 成等比数列．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{\frac{4}{a_na_{n+1}}\}$的前 n 项和 T_n．

18．(本小题满分 12 分)

已知两个变量 y 与 x 线性相关，某研究小组为得到其具体的线性关系进行了 10 次实验，得到 10 个样本点研究小组去掉了明显偏差较大的 2 个样本点，剩余的 8 个样本点$(x_i，y_i)(i=1，2，3，\cdots，8)$满足$\sum_{i=1}^{8}x_i=32$，$\sum_{i=1}^{8}y_i=132$，根据这 8 个样本点求得的线性回归方程为 $\hat{y}=3x+\hat{a}$(其中$\hat{a}\in\mathbf{R}$)．后为稳妥起见，研究小组又增加了 2 次实验，得到 2 个偏差较小的样本点(2，11)，(6，22)，根据这 10 个样本点重新求得线性回归方程为 $\hat{y}=\hat{n}x+\hat{m}$(其中$\hat{n}$，$\hat{m}\in\mathbf{R}$).

(1)求$\hat{a}$的值；

(2)证明回归直线 $\hat{y}=\hat{n}x+\hat{m}$ 经过点(4，16.5)，并指出$\hat{n}$与 3 的大小关系.

参考公式：线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}$.

19．(本小题满分 12 分)

记函数 $f(x)=\sin^2\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x(\omega>0)$的最小正周期为 T．若$\frac{\pi}{3}<T<\frac{2\pi}{3}$，且 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$对称.

(1)求 ω 的值；

(2)将函数 $y=f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位，再将得到的图象．上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍(纵坐标不变)，得到函数 $y=g(x)$的图象，求 $g(x)$在$[\frac{\pi}{2}，0)$上的值域.

20．(本小题满分 12 分)

甲、乙两地教育部门到某师范大学实施“优才招聘计划”，即通过对毕业生进行笔试，面试，模拟课堂考核这 3 项程序后直接签约一批优秀毕业生，已知 3 项程序分别由 3 个考核组独立依次考核，当 3 项程序均通过后即可签约．去年，该校数学系 130 名毕业生参加甲地教育部门“优才招聘计划”的具体情况如下表(不存在通过 3 项程序考核放弃签约的情况)．

性别＼人数	参加考核但未能签约的人数	参加考核并能签约的人数
男生	45	15
女生	60	10

今年，该校数学系毕业生小明准备参加两地的“优才招聘计划”，假定他参加各程序的结果相互不影响，且他的辅导员作出较客观的估计：小明通过甲地的每项程序的概率均为$\frac{1}{2}$，通过乙地的各项程序的概率依次为$\frac{1}{3}$，$\frac{3}{5}$，m，其中 $0<m<1$．

(1)判断是否有 90%的把握认为这 130 名毕业生去年参加甲地教育部门“优才招聘计划”能否签约与性别有关；

(2)若小明能与甲、乙两地签约分别记为事件 A，B，他通过甲、乙两地的程序的项数分别记为 X，Y．当 $E(X)>E(Y)$时，证明：$P(A)>P(B)$．

参考公式与临界值表：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$．

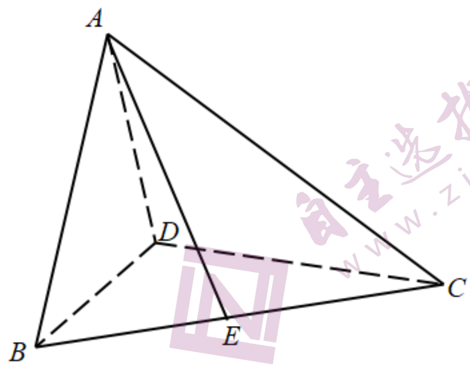
$P(\chi^2\geqslant k)$	0.10	0.05	0.025	0.010
k	2.706	3.841	5.024	6.635

21．(本小题满分 12 分)

如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，已知平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，$AC\perp BD$，$CB=CD=\sqrt{5}$，$BD=2$，E 为 BC 的中点．

(1)若 $AD=\sqrt{2}$，求直线 BD 与 AE 所成角的余弦值；

(2)已知点 F 在线段 AC 上，且 $AF=\frac{1}{3}AC$，求二面角 $F-DE-C$ 的大小．



22．(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-ax$，$g(x)=ax-\ln x$，$a\in\mathbf{R}$．

(1)若 $f(x)$在 $x=0$ 处的切线与 $g(x)$在 $x=1$ 处的切线相同，求实数 a 的值；

(2)令 $F(x)=f(x)+g(x)$，直线 $y=m$ 与函数 $F(x)$的图象有两个不同的交点，交点横坐标分别为 x_1，x_2，证明：$x_1+x_2>1$．