内江市高中 2024 届零模试题

数学(文科)参考答案及评分意见

一、选择题:(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.)

1. A　2. A　3. B　4. D　5. B　6. C　7. D　8. A　9. D　10. A　11. C　12. D

二、填空题:(本大题共 4 小题,每小题 5 分,满分 20 分.)

13. $\pi x+y-\pi^2=0$　　14. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$(答案不唯一)　　15. $(1,\frac{28}{27})$　　16. $\sqrt{5}$

三、解答题:(本大题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. 解:(1)由题意得,双曲线的焦点在 x 轴上,

故可设标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,半焦距为 c

因为椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 长轴两个端点分别为$(-5,0)$,$(5,0)$, …… 2 分

焦点为$(-4,0)$,$(4,0)$,所以 $c=5$,$a=4$,$b^2=c^2-a^2=9$ …… 4 分

故所求双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ …… 5 分

(2)因为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$的焦点为 F,
点 $P(2,n)(n>0)$在抛物线 C 上,$|PF|=3$

所以 $2+\frac{p}{2}=3$,解得 $p=2$

所以抛物线方程为 $y^2=4x$ …… 7 分

因为点 $P(2,n)(n>0)$在抛物线 C 上,

所以 $n^2=4\times2=8$,由 $n>0$ 得 $n=2\sqrt{2}$,所以 $P(2,2\sqrt{2})$ …… 10 分

18. 解:(1)由 $f'(3)=0$,即 $27-6a+3=0$,得 $a=5$ …… 1 分

$f(x)=x^3-5x^2+3x$,$f'(x)=3x^2-10x+3$

令 $f(x)=0$,得 $x_1=3$,$x_2=\frac{1}{3}$. …… 2 分

当 $1<x<3$ 时,$f'(x)<0$,当 $3<x<5$ 时,$f'(x)>0$, …… 4 分

即当 $x=3$ 时,$f(x)$的极小值$f(3)=-9$.

又$f(1)=-1$,$f(5)=15$, …… 5 分

$\therefore f(x)$在$[1,5]$上的最小值是$f(3)=-9$,最大值是$f(5)=15$. …… 6 分

(2)因为$f(x)$在$[3,+\infty)$上是增函数,

所以$f'(x)=3x^2-2ax+3\geqslant0$ 在$[3,+\infty)$上恒成立, …… 8 分

$\therefore a\leqslant\frac{3}{2}(x+\frac{1}{x})_{min}$ …… 9 分

$\because y=x+\frac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上为增函数,

$\therefore$ 当 $x=3$ 时,$\frac{3}{2}(x+\frac{1}{x})_{min}=\frac{3}{2}\times\frac{10}{3}=5$, …… 11 分

$\therefore a\leqslant5$. 即实数 a 的取范围是$(-\infty,5]$ …… 12 分

19. 解：(1)由于直线 l 过点 $Q(4,1)$，且倾斜角为45°，则直线 l 的方程为 $y=x-3$ ……… 2分

联立$\begin{cases}y^2=8x\\y=x-3\end{cases}$，得 $x^2-14x+9=0$，$\triangle>0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=14$，$x_1\cdot x_2=9$ ……………………………… 4分

所以 $|AB|=\sqrt{1+1^2}\times\sqrt{14^2-4\times9}=8\sqrt{5}$ ……………………………… 6分

(2)设直线 l：$y-1=k(x-4)$，

联立$\begin{cases}y^2=8x\\y-1=k(x-4)\end{cases}$，得 $k^2x^2+(2k-8k^2-8)x+(1-4k^2)=0$，$\triangle>0$ ……………… 8分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{2k-8k^2-8}{k^2}$

因为弦 AB 恰被 Q 平分，所以 $x_1+x_2=-\dfrac{2k-8k^2-8}{k^2}=2\times4$ ……………………… 10分

所以 $k=4$ ……………………………………………………………………………… 11分

所以 AB 所在直线的方程为 $4x-y-15=0$. ………………………………………………… 12分

20. 解：(1)由题意，知 $\bar{x}=10$，$\bar{y}=20$，…………………………………………………… 2分

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(6-10)(15-20)+(8-10)(18-20)+(10-10)(20-20)+(12-10)(24-20)+(14-10)(23-20)=20+4+0+8+12=44$ ……………………… 4分

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=16+4+0+4+16=40$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=25+4+0+16+9=54$，……………………………………………… 6分

所以 $r=\dfrac{44}{\sqrt{40\times54}}=\dfrac{11}{3\sqrt{5}}$. 又 $3\sqrt{15}\approx11.62$，则 $r\approx0.95$.

因为 y 与 x 的相关系数近似为0.95，说明 y 与 x 的线性相关非常高，

所以可以用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系. ……………………………………………… 8分

(2)由(1)可得，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{44}{40}=1.1$，

则 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=20-1.1\times10=9$，

所以 y 关于 x 的回归直线方程为 $\hat{y}=1.1x+9$，……………………………………… 10分

当 $x=30$ 时，$\hat{y}=1.1\times30+9=42$，

所以预测车辆发车间隔时间为30分钟时乘客的等候人数为42人. ……………………… 12分

21. 解：(1)由题意可知 $|PE|+|PF|=|PE|+|PA|=|EA|=4>|EF|=2$ ………… 2分

所以动点 P 的轨迹是以 E、F 为焦点且长轴长为4的椭圆，

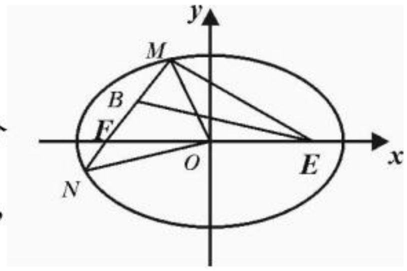
即 $2a=4$，$2c=2$

所以 $a=2$，$b=\sqrt{3}$ ……………………………………………………………………… 4分

因此动点 P 的轨迹 Γ 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ……………………………………… 5分

(2)如图，不妨设点 M 在 x 轴上方，连接 OM，

$\because O$、B 分别为 EF、FM 的中点，



$\therefore S_{\triangle MEB}=S_{\triangle MOF}$，

$\therefore S=S_{\triangle MOF}+S_{\triangle OFN}=S_{\triangle MON}$ ………………………………… 6 分

①当直线 MN 的斜率不存在时，其方程为 $x=-1$，$M(-1,\frac{3}{2})$，$N(-1,-\frac{3}{2})$

此时 $S_{\triangle MNO}=\frac{1}{2}|MN|\cdot|OF|=\frac{1}{2}\times 1\times[\frac{3}{2}-(-\frac{3}{2})]=\frac{3}{2}$ ………………………………… 7 分

②当直线 MN 的斜率存在时，设其方程为 $y=k(x+1)$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，显然直线 MN 不与 x 轴重合，即 $k\neq 0$；

联立$\begin{cases}y=k(x+1)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得$(3+4k^2)x^2+8k^2x+4k^2-12=0$，

则 $x_1+x_2=-\frac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$

$\therefore |MN|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{12(1+k^2)}{3+4k^2}$， ………… 9 分

又点 O 到直线 MN 的距离 $d=\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$，

$\therefore S=\frac{1}{2}|MN|\times d=6\sqrt{\frac{k^2(k^2+1)}{(3+4k^2)^2}}$ ………………………………… 10 分

令 $m=3+4k^2\in(3,+\infty)$，

则 $S=6\sqrt{\frac{(m-3)(m+1)}{16m^2}}=\frac{3}{2}\sqrt{-\frac{3}{m^2}-\frac{2}{m}+1}$，

$\because m\in(3,+\infty)$，$\therefore \frac{1}{m}\in(0,\frac{1}{3})$，$\therefore -\frac{3}{m^2}-\frac{2}{m}+1=-3(\frac{1}{m}+\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}\in(0,1)$，

$\therefore S\in(0,\frac{3}{2})$ ………………………………… 11 分

综上所述：$S\in(0,\frac{3}{2}]$，则 S 的最大值为$\frac{3}{2}$ ………………………………… 12 分

22. 解：(1)因为$f(x)=\ln x-ax$，所以$f'(x)=\frac{1}{x}-a(x>0)$ ………………………………… 1 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. ………………… 2 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$ 即$\frac{1}{x}-a>0$，解得 $0<x<\frac{1}{a}$；

令 $f'(x)<0$，即$\frac{1}{x}-a<0$，解得 $x>\frac{1}{a}$； ………………………………… 4 分

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

当 $a>0$ 时，$f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$上单调递增

$f(x)$在$(\frac{1}{a},+\infty)$上单调递减. ………………………………… 5 分

(2)因为$\sqrt{e}\leqslant x\leqslant e^2$,所以$x-1>0$;

由$\frac{x-1}{f(x)}>1$恒成立,可得$\begin{cases}f(x)>0\\f(x)<x-1\end{cases}$在$x\in[\sqrt{e},e^2]$恒成立, ………………………… 6分

即$\begin{cases}a<\frac{\ln x}{x}\\a>\frac{\ln x+1}{x}-1\end{cases}$在$x\in[\sqrt{e},e^2]$恒成立.

令$h(x)=\frac{\ln x}{x},g(x)=\frac{\ln x+1}{x}-1$,则$\begin{cases}a<h(x)_{min}\\a>g(x)_{max}\end{cases}$ ………………………… 7分

由$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,令$h'(x)=0$得$x=e$

当$\sqrt{e}<x<e$时,$h'(x)>0$,$h(x)$在$(\sqrt{e},e^2)$上单调递增;

当$e<x<e^2$时,$h'(x)<0$,$h(x)$在$(\sqrt{e},e^2)$上单调递减;

$h(\sqrt{e})=\frac{1}{2\sqrt{e}},h(e^2)=\frac{2}{e^2}$,因为$\frac{1}{2\sqrt{e}}>\frac{2}{e^2}$,所以$h(x)_{min}=\frac{2}{e^2}$. ………………………… 9分

由$g'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}<0$,所以$g(x)$在$(\sqrt{e},e^2)$上单调递减,

所以$g(x)_{max}=g(\sqrt{e})=\frac{3}{2\sqrt{e}}-1$. ………………………… 11分

所以实数a的取值范围为$[\frac{3}{2\sqrt{e}}-1,\frac{2}{e^2}]$. ………………………… 12分