高三数学考试参考答案(文科)

1. B 【解析】本题考查集合的运算,考查数学运算的核心素养.
因为 $A=\{1,3,5,7\}$,$B=\{1,2,3\}$,所以 $A\cap B=\{1,3\}$.

2. D 【解析】本题考查复数的运算,考查数学运算的核心素养.
因为 $\bar{z}=2-\mathrm{i}$,所以 $z-\bar{z}+z\bar{z}=2\mathrm{i}+4+1=5+2\mathrm{i}$.

3. C 【解析】本题考查解三角形的知识,考查数学运算的核心素养.
由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,得 $\frac{3}{\sin A}=8$,所以 $\sin A=\frac{3}{8}$.

4. A 【解析】本题考查函数的图象和性质,考查逻辑推理与直观想象的核心素养.
$f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$,因为 $f(-x)=(-x+\frac{1}{x})\sin(-x)=(x-\frac{1}{x})\sin x=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数,排除 B,D. 当 $x\in(0,1)$ 时,$f(x)<0$,故选 A.

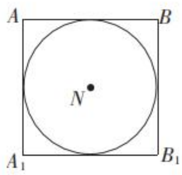
5. D 【解析】本题考查统计的知识,考查数据分析与数学运算的核心素养.
由雷达图可知,400 米跑项目中,甲的得分比乙的得分高,A 错误;甲各项得分的波动较大,乙的各项得分均在(600,800]内,波动较小,B 错误;在铁饼项目中,乙比甲水平高,C 错误;甲的各项得分的极差约为 1000−470=530,乙的各项得分的极差小于 200,D 正确.

6. A 【解析】本题考查三角恒等变换,考查数学运算的核心素养.
因为 $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,所以 $\tan\alpha=3$,所以 $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=-2$.

7. D 【解析】本题考查线性规划,考查数学运算与直观想象的核心素养.
$\frac{y+2}{x+3}$ 表示可行域内的点 (x,y) 与 $(-3,-2)$ 连线所在直线的斜率,画出可行域(图略)知,经过点 $(-1,2)$ 与 $(-3,-2)$ 的直线斜率最大,且最大值为 2.

8. C 【解析】本题考查三角函数的性质,考查数学运算的核心素养.
由 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,得 $\omega=2$,所以 $f(x)=2\sin[2(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$,令 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$,取 $k=0$,得 $x=\frac{\pi}{3}$,取 $k=-1$,得 $x=-\frac{\pi}{6}$,
因为 $|-\frac{\pi}{6}|<|\frac{\pi}{3}|$,所以与 y 轴距离最近的对称轴方程为 $x=-\frac{\pi}{6}$.

9. C 【解析】本题考查球面与柱体侧面的交线长度,考查直观想象与数学运算的核心素养.
设 N 为四边形 ABB_1A_1 的中心,连接 MN(图略),可知 $MN\perp$ 平面 ABB_1A_1,所以题中所求交线即以 N 为圆心,2 为半径的圆,球与侧面 ABB_1A_1 的交线如图所示,故交线长 $l=2\times\pi\times2=4\pi$.



10. C 【解析】本题考查古典概型,考查数学运算的核心素养.

画出树状图，甲 $\to\begin{cases}乙\to\begin{cases}甲\to\begin{cases}乙\\丙\end{cases}\\丙\to\begin{cases}甲\\乙\end{cases}\end{cases}\\丙\to\begin{cases}甲\to\begin{cases}乙\\丙\end{cases}\\乙\to\begin{cases}甲\\丙\end{cases}\end{cases}\end{cases}$，可知所求概率为 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

11. B 【解析】**本题考查双曲线的性质，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.**

由已知得 $\frac{|F_1Q|}{|F_2Q|}=\frac{5}{3}$，因为 PQ 平分 $\angle F_1PF_2$，所以 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|F_1Q|}{|F_2Q|}=\frac{5}{3}$，所以 $\frac{\frac{b^2}{a}+2a}{\frac{b^2}{a}}=\frac{5}{3}$，

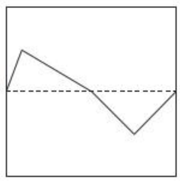
整理得 $b^2=3a^2$，由 $c^2-a^2=3a^2$，得 $c^2=4a^2$，所以 $e=\frac{c}{a}=2$.

12. B 【解析】**本题考查新定义以及函数的性质，考查逻辑推理的核心素养.**

对于①，易知 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)$ 可以是中心为原点且边长为 2 的正方形的“优美函数”，故①正确.

对于②，令 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)=4\cos(2x-\frac{\pi}{6})+3$ 图象的对称中心为 $(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},3)(k\in\mathbf{Z})$，故以 $(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},3)(k\in\mathbf{Z})$ 为中心的正方形都能被函数 $f(x)=4\cos(2x-\frac{\pi}{6})+3$ 的图象平分，即 $f(x)=4\cos(2x-\frac{\pi}{6})+3$ 可以同时是无数个正方形的“优美函数”，故②错误.

对于③，令 $g(x)=\ln(\sqrt{4x^2+1}-2x)$，易知 $g(x)$ 为奇函数. 又因为 $f(x)$ 的图象是由 $g(x)$ 的图象向下平移一个单位长度得到的，所以 $f(x)$ 图象的对称中心为 $(0,-1)$，故以 $(0,-1)$ 为中心的正方形都能被 $f(x)=\ln(\sqrt{4x^2+1}-2x)-1$ 的图象平分，故③正确.

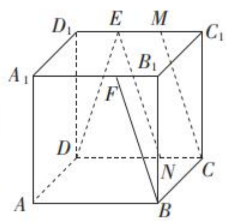


对于④，如图所示，可知④错误.

13. 5 【解析】**本题考查平面向量的垂直，考查数学运算的核心素养.**

因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(m-3,3)$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，所以 $3(m-3)-3\times2=0$，解得 $m=5$.

14. $\frac{4}{5}$ 【解析】**本题考查立体几何初步的知识，考查直观想象的核心素养.**



在棱 CD，C_1D_1 上分别取点 N，M，使得 $CN=\frac{1}{3}CD$，$C_1M=\frac{1}{3}C_1D_1$，连接 CM，NE，可知 $BF/\!/CM/\!/NE$，则 $\angle DEN$ 为直线 DE 与 BF 所成的角. 设 $AB=3$，在 $\triangle DEN$ 中，易得 $DE=\sqrt{10}$，$NE=\sqrt{10}$，$DN=2$，设

$\angle DEN=\theta$,则 $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$,从而 $\cos\theta=1-2\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{4}{5}$.

15. $x^2=2y$;$\dfrac{3}{2}$(答案不唯一,只要 $0<p<2$,且所求距离为 $\dfrac{4}{2}-\dfrac{p}{2}$ 即可) **【解析】本题考查抛物线的定义及性质,考查直观想象的核心素养.**

易知过焦点的弦中,通径最短,所以 $2p<4$,解得 $0<p<2$. 设该弦所在的直线与 C 的交点分别为 A,B,则弦 AB 的中点到 x 轴的距离为 $\dfrac{|AB|}{2}-\dfrac{p}{2}$. 取 $p=1$,则抛物线 C 的方程为 $x^2=2y$,此时弦 AB 的中点到 x 轴的距离为 $\dfrac{3}{2}$.

16. ①③④ **【解析】本题考查不等关系,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.**

因为 $x^2=y^3<1$,所以 $y=x^{\frac{2}{3}}<1$,所以 $0<x<y<1$,①正确,②错误;

令 $g(x)=|y-x|=y-x=x^{\frac{2}{3}}-x$,则 $g'(x)=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-1$,当 $0<x<\dfrac{8}{27}$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,当 $x>\dfrac{8}{27}$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,所以 $g(x)_{\max}=g(\dfrac{8}{27})=\dfrac{4}{27}$,③正确;

令 $h(x)=|y^2-x^2|=y^2-x^2=x^{\frac{4}{3}}-x^2$,则 $h'(x)=\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-2x$,可知当 $0<x<\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$时,$h(x)$单调递增,当 $x>\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$时,$h(x)$单调递减,所以 $h(x)_{\max}=h(\dfrac{2\sqrt{6}}{9})=\dfrac{4}{27}$,④正确.

17. 解:(1)设$\{a_n\}$的公差为 d,因为 $a_2=4$,$2a_4-a_5=7$,

所以 $2(4+2d)-(4+3d)=7$,解得 $d=3$,从而 $a_1=1$, ………………………… 2 分

所以 $a_n=3n-2$. ………………………………………………………… 3 分

设$\{b_n\}$的公比为 q,因为 $b_4+b_5=8(b_1+b_2)$,所以$\dfrac{b_4+b_5}{b_1+b_2}=q^3=8$,解得 $q=2$, ………… 5 分

因为 $b_3=4$,所以 $b_1=\dfrac{4}{2^2}=1$, ……………………………………………… 6 分

所以 $b_n=2^{n-1}$. ………………………………………………………… 7 分

(2)因为 $c_n=\dfrac{3}{(3n-2)(3n+1)}+2^{n-1}$,所以 $c_n=\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}+2^{n-1}$, ………………… 9 分

所以 $S_n=(1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1})+(1+2+\cdots+2^{n-1})$,……………… 10 分

所以 $S_n=(1-\dfrac{1}{3n+1})+\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-\dfrac{1}{3n+1}$. ……………………………… 12 分

18. 解:(1)由表中数据可知商业峰会期间 30 天内,该商店一天这种食品的需求量不超过 500 箱的天数为 $5+6+8=19$, ………………………………………………… 2 分

所以商业峰会期间该商店一天这种食品的需求量不超过 500 箱的概率为$\dfrac{19}{30}$. ………… 4 分

(2)当峰会期间这种食品一天的进货量为 550 箱时,

若到会人数位于区间$(8000,9000]$内,则 $Y=400\times100\times(1-0.6)+150\times100\times(0.3-0.6)$

$=11500$ 元，…………………………………………………………………… 6 分

若到会人数位于区间$(9000,10000]$内，则 $Y=450\times100\times(1-0.6)+100\times100\times(0.3-0.6)=15000$ 元，…………………………………………………………………… 8 分

若到会人数位于区间$(10000,11000]$内，则 $Y=500\times100\times(1-0.6)+50\times100\times(0.3-0.6)=18500$ 元，…………………………………………………………………… 10 分

若到会人数超过 11000，则 $Y=550\times100\times(1-0.6)=22000$ 元，

即 Y 的所有可能值为 11500，15000，18500，22000. …………………………………… 11 分

Y 不超过 15000 元，意味着到会人数不超过 10000，

到会人数不超过 10000 的频率为$\frac{5+6}{30}=\frac{11}{30}$，所以 Y 不超过 15000 元的概率的估计值为$\frac{11}{30}$.

…………………………………………………………………… 12 分

19. (1)证明：在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$BC=AD=1$，$AB=2$，

过点 C 作 $CE\perp AB$ 于 E，则 $BE=\frac{1}{2}$，可知$\angle ABC=60^\circ$，…………………………… 2 分

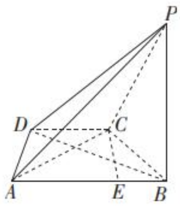
由余弦定理知 $AC^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\frac{1}{2}=3$，

则 $AC^2+BC^2=AB^2$，所以 $AC\perp BC$. …………………………………………… 4 分

又 $AC\perp PC$，$BC\cap PC=C$，BC，$PC\subset$平面 PBC，所以 $AC\perp$平面 PBC. ……………… 5 分

又 $AC\subset$平面 $ABCD$，所以平面 $ABCD\perp$平面 PBC. …………………………………… 6 分

(2)解：连接 BD，由(1)知平面 $ABCD\perp$平面 PBC，因为 $PB\perp BC$，所以 $PB\perp$平面 BCD.



又 $CE=1\times\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，……………… 8 分

所以三棱锥 $P-BCD$ 的体积 $V_{P-BCD}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2\sqrt{3}=\frac{1}{2}$. ……………… 9 分

在$\triangle PBC$ 中，因为 $PB\perp BC$，所以 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\times1\times2\sqrt{3}=\sqrt{3}$. ……………………… 10 分

设点 D 到平面 PBC 的距离为 d，所以三棱锥 $D-PBC$ 的体积 $V_{D-PBC}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}d$. ………

…………………………………………………………………… 11 分

由 $V_{D-PBC}=V_{P-BCD}$，得$\frac{1}{3}\times\sqrt{3}d=\frac{1}{2}$，解得 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………………… 12 分

20. 解：(1)由 $e^2=\frac{2}{3}=1-\frac{b^2}{a^2}$，得 $a^2=3b^2$，…………………………………… 1 分

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{3b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，…………………………………………… 2 分

把点$(\sqrt{3},1)$的坐标代入上式，得$\frac{3}{3b^2}+\frac{1}{b^2}=1$，可得 $b^2=2$，…………………… 3 分

所以 $a^2=6$，$c=2$，故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………………………… 4 分

(2)由(1)知焦点 F 的坐标为(2,0),若直线 l 的斜率为 0,则 O,A,B 三点不能构成三角形,所以直线 l 的斜率不为 0,设直线 l 的方程为 $x=my+2$,

联立方程组$\begin{cases}x=my+2,\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1,\end{cases}$消去 x,得$(m^2+3)y^2+4my-2=0$, …………………………… 5 分

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=-\dfrac{4m}{m^2+3},y_1y_2=-\dfrac{2}{m^2+3}$, ………………………… 6 分

$S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|=|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{(-\dfrac{4m}{m^2+3})^2+4\times\dfrac{2}{m^2+3}}$

$=\dfrac{2\sqrt{6}\sqrt{m^2+1}}{m^2+3}$. …………………………………………………………………… 8 分

令 $\sqrt{m^2+1}=t(t\geqslant1)$,则 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{2\sqrt{6}t}{t^2+2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{t+\dfrac{2}{t}}\leqslant\dfrac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{3}$,当且仅当 $t=\sqrt{2}$时,等号成立,即

$\triangle OAB$ 面积的最大值为$\sqrt{3}$. …………………………………………………………… 10 分

令 $\sqrt{m^2+1}=\sqrt{2}$,解得 $m=\pm1$,所以此时直线 l 的方程为 $x-y-2=0$ 或 $x+y-2=0$. …
…………………………………………………………………………………………………… 12 分

21.(1)解:由题意,$f'(x)=1+\ln x$,…………………………………………………………………… 1 分

由 $f'(x)=1+\ln x=2$,得 $x=\mathrm{e}$. …………………………………………………………… 2 分

则 $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}=2\mathrm{e}+m$,解得 $m=-\mathrm{e}$. ……………………………………………………… 3 分

(2)证明:当 $0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时,$f'(x)<0$;当 $x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时,$f'(x)>0$. ……………………………… 4 分

所以 $f(x)\geqslant f(\dfrac{1}{\mathrm{e}})=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. …………………………………………………………………… 5 分

$f(x)<\dfrac{\mathrm{e}^x}{2x}$等价于$\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{\mathrm{e}^x}{2x^3}$. ……………………………………………………………… 6 分

令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,则 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. 当 $0<x<\mathrm{e}$ 时,$g'(x)>0$;当 $x>\mathrm{e}$ 时,$g'(x)<0$. ……
…………………………………………………………………………………………………… 7 分

所以 $g(x)_{\max}=g(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. …………………………………………………………………… 8 分

令 $h(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{2x^3}(x>0)$,则 $h'(x)=\dfrac{(x-3)\mathrm{e}^x}{2x^4}$. 当 $0<x<3$ 时,$h'(x)<0$;当 $x>3$ 时,$h'(x)>0$. …………………………………………………………………………………………………… 9 分

所以 $h(x)_{\min}=h(3)=\dfrac{\mathrm{e}^3}{54}$. ………………………………………………………………… 10 分

因为 $\mathrm{e}^4>54$,所以$\dfrac{\mathrm{e}^3}{54}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}=\dfrac{\mathrm{e}^4-54}{54\mathrm{e}}>0$,所以 $g(x)_{\max}<h(x)_{\min}$, ………………………… 11 分

所以$\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{\mathrm{e}^x}{2x^3}$,从而 $f(x)<\dfrac{\mathrm{e}^x}{2x}$得证,故$-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\leqslant f(x)<\dfrac{\mathrm{e}^x}{2x}$. ………………………… 12 分

22. 解:(1) $(x+5)^2+y^2=24$ 可化为 $x^2+y^2+10x+1=0$, ………………………… 2 分

因为 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,所以 $x^2+y^2+10x+1=0$ 可化为 $\rho^2+10\rho\cos\theta+1=0$,

即圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2+10\rho\cos\theta+1=0$. ………………………… 4 分

(2)因为直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=2t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数),当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$时,直线 l 与 C 没有交点,所以 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$,所以$\frac{y}{x}=2\tan\alpha$,

即直线 l 的普通方程为 $2x\tan\alpha-y=0$. ………………………… 5 分

设圆心 C 到直线 l 的距离为 d,则 $d=\frac{|-10\tan\alpha|}{\sqrt{4\tan^2\alpha+1}}$, ………………………… 6 分

由 $d^2=24-(\frac{|AB|}{2})^2$,得$\frac{100\tan^2\alpha}{4\tan^2\alpha+1}=24-4$, ………………………… 8 分

解得 $\tan^2\alpha=1$,即 $\tan\alpha=\pm1$. ………………………… 9 分

所以 l 的斜率为±2. ………………………… 10 分

23. 解:(1)因为 $f(x)=\begin{cases}-2x-1, x\leqslant-2,\\ 3, -2<x<1,\\ 2x+1, x\geqslant1,\end{cases}$ ………………………… 3 分

所以不等式 $f(x)\leqslant7$ 可化为$\begin{cases}x\leqslant-2,\\ -2x-1\leqslant7\end{cases}$或$\begin{cases}-2<x<1,\\ 3\leqslant7\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant1,\\ 2x+1\leqslant7,\end{cases}$ ………………………… 4 分

解得$-4\leqslant x\leqslant3$,即不等式 $f(x)\leqslant7$ 的解集为$[-4,3]$. ………………………… 5 分

(2)因为$|x-1|+|x+2|\geqslant|(x-1)-(x+2)|=3$,当且仅当$(x-1)(x+2)\leqslant0$,即$-2\leqslant x\leqslant1$ 时,等号成立,所以 $t=3$,从而 $a+2b+3c=3$. ………………………… 7 分

又 $a^2+2b^2+3c^2=a^2+(\sqrt{2}b)^2+(\sqrt{3}c)^2$,所以 $a+2b+3c=1\times a+\sqrt{2}\times(\sqrt{2}b)+\sqrt{3}\times(\sqrt{3}c)\leqslant\sqrt{[1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2]\cdot[a^2+(\sqrt{2}b)^2+(\sqrt{3}c)^2]}$, ………………………… 9 分

即 $3^2\leqslant6(a^2+2b^2+3c^2)$,当且仅当 $a=\frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}c}{\sqrt{3}}$,即 $a=b=c$ 时,等号成立,

所以 $a^2+2b^2+3c^2\geqslant\frac{3}{2}$,即 $a^2+2b^2+3c^2$ 的最小值为$\frac{3}{2}$. ………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。