邯郸市高二年级第二学期期末考试
数学参考答案

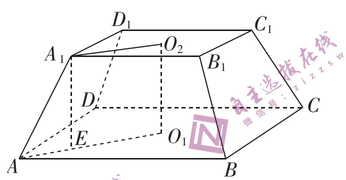
1. D　由 $B=\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$，可知 $A\cup B=\{-1,0,1,2\}$.

2. A　$z=2-\mathrm{i}$，$\bar{z}=2+\mathrm{i}$，代入有 $2a+b+2+(1-a)\mathrm{i}=0$，故 $a=1$，$b=-4$.

3. C　因为 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}$，所以 $|\boldsymbol{a}|^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4|\boldsymbol{b}|^2=13$，解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$.

4. D　近日点距离为 $\sqrt{m}-\sqrt{m-n}$，远日点距离为 $\sqrt{m}+\sqrt{m-n}$，近日点距离和远日点距离之和是 $\sqrt{m}-\sqrt{m-n}+\sqrt{m}+\sqrt{m-n}=18$，近日点距离和远日点距离之积是 $(\sqrt{m}-\sqrt{m-n})\cdot(\sqrt{m}+\sqrt{m-n})=16$，解得 $m=81$，$n=16$，则 $m+n=97$.

5. B　连接 AO_1，A_1O_2，作 $A_1E\perp AO_1$，垂足为 E. $\angle AA_1E$ 即直线 O_1O_2 与直线 AA_1 所成的角.



$\tan\angle AA_1E=\dfrac{AE}{A_1E}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

6. D　由题意可得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(2)=0$. 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，且 $f(-2)=0$. 由 $xf(x)>0$，得 $\begin{cases}x>0,\\f(x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\f(x)<0,\end{cases}$ 解得 $x<-2$ 或 $x>2$.

7. A　初始数阵中的 9 个数成等差数列，这 9 个数的和为 45. 因为新的数阵中所有数字之和为 25，所以随机选中的两个数字之和为 $\dfrac{45-25}{2}=10$，有 4 种情况. 故所求概率为 $\dfrac{4}{\mathrm{C}_9^2}=\dfrac{1}{9}$.

8. B　因为 $\mathrm{e}^2>2.7^2=7.29>7$，所以 $\dfrac{\mathrm{e}^2}{7}>1$. 因为 $2\sqrt{2}-2<2\times1.5-2=1$，所以 $2\sqrt{2}-2<\dfrac{\mathrm{e}^2}{7}$，即 $a<b$. 令函数 $f(x)=\sqrt{x}-2-\dfrac{\ln x}{3}$，$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{3x}=\dfrac{3\sqrt{x}-2}{6x}$.

当 $x>\dfrac{4}{9}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

因为 $2\sqrt{2}>\mathrm{e}$，所以 $8>\mathrm{e}^2$，所以 $f(8)>f(\mathrm{e}^2)=\mathrm{e}-2-\dfrac{2}{3}>0$，即 $2\sqrt{2}-2-\ln 2>0$，则 $2\sqrt{2}-2>\ln 2$，$a>c$. 故 $b>a>c$.

另：构造 $f(x)=(\sqrt{2}-1)x-\ln x$，求导可得 $f(x)\geqslant f(\sqrt{2}+1)=1-\ln(\sqrt{2}+1)=\ln\dfrac{\mathrm{e}}{\sqrt{2}+1}>$

$\ln 1=0$,从而 $a>c$.

9. BC　由函数图象可知,$\frac{T}{2}=\frac{7\pi}{48}-\frac{\pi}{48}=\frac{\pi}{8}$,则 $|\omega|=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$,不妨取 $\omega=8$.

当 $x=\frac{\frac{7\pi}{48}+\frac{\pi}{48}}{2}=\frac{\pi}{12}$ 时,$f(x)$取得最大值,

则 $8\times\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,即 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

故 $f(x)=\sin(8x-\frac{\pi}{6})=\cos[\frac{\pi}{2}-(8x-\frac{\pi}{6})]=\cos(\frac{2\pi}{3}-8x)$.

10. ABD　2022 届初三年级学生仰卧起坐一分钟的个数在$[30,60)$内的学生人数占比为 $20\%+25\%+25\%=70\%$,A 正确. 由于 2023 届初三学生人数较 2022 届上升了 10%,假设 2022 届初三学生人数为 $a(a>0)$,则仰卧起坐一分钟的个数在$[60,80]$内的学生人数为 $0.2a$,2023 届初三学生仰卧起坐一分钟的个数在$[60,80]$内的学生人数为 $a\times(1+10\%)\times41\%=0.451a$,$0.451a>0.2a\times2.2$,B 正确. 2022 届初三学生仰卧起坐一分钟个数的中位数在$[40,50)$内,2023 届初三学生仰卧起坐一分钟个数的中位数在$[50,60)$内,C 错误. 2022 届初三学生仰卧起坐一分钟个数不小于 50 的人数占 $25\%+15\%+5\%=45\%$,2023 届初三学生仰卧起坐一分钟个数不小于 50 的人数占 $41\%+34\%+7\%=82\%$,D 正确.

11. BC　设切点为(x_0,y_0),$f'(x)=3x^2-m$,切线的方程为 $y-(x_0^3-mx_0)=(3x_0^2-m)(x-x_0)$. 代入点 $P(-1,1)$,可得 $1-(x_0^3-mx_0)=(3x_0^2-m)(-1-x_0)$,即 $2x_0^3+3x_0^2=m-1$.
因为过点 $P(-1,1)$恰能作 2 条曲线 $y=f(x)$的切线,所以方程 $2x_0^3+3x_0^2=m-1$ 有 2 解.
令函数 $g(x)=2x^3+3x^2$,$g'(x)=6x(x+1)$. 当 $x<-1$ 或 $x>0$ 时,$g'(x)>0$;当 $-1<x<0$ 时,$g'(x)<0$.
所以 $g(x)$在$(-\infty,-1)$和$(0,+\infty)$上单调递增,在$(-1,0)$上单调递减. $g(x)_{极大值}=g(-1)=1$,$g(x)_{极小值}=g(0)=0$,所以 $m-1=1$ 或 $m-1=0$,解得 $m=2$ 或 $m=1$.

12. BCD　该水晶多面体的俯视图如图 3 所示,$EM=NF=\frac{\sqrt{2}}{2}MN$,$AB=EM+MN+NF=(\sqrt{2}+1)MN=2+\sqrt{2}$,A 错误. 建立如图 4 所示的空间直角坐标系,则 $H(1+\sqrt{2},1+\sqrt{2},2+\sqrt{2})$,$G(1,1+\sqrt{2},2+\sqrt{2})$. 记该水晶多面体外接球的半径为 r,球心 $S(1+\frac{\sqrt{2}}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2})$,则 $r^2=|SH|^2=(1+\frac{\sqrt{2}}{2}-1-\sqrt{2})^2+(1+\frac{\sqrt{2}}{2}-1-\sqrt{2})^2+(1+\frac{\sqrt{2}}{2}-2-\sqrt{2})^2=\frac{5}{2}+\sqrt{2}$,故该水晶多面体外接球的表面积为 $4\pi r^2=(10+4\sqrt{2})\pi$,B 正确. 因为 $HP\parallel AB_1$,$PQ\parallel B_1D_1$,所以平面 $HPQ\parallel$平面 AB_1D_1. 易得平面 AB_1D_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$,即 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$为平面 HPQ 的一个法向量. $\overrightarrow{GH}=(\sqrt{2},0,0)$,$\cos\langle\overrightarrow{GH},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{GH}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{GH}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故直线 HG 与平面 HPQ 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$,C 正确. 点 G 到平面 HPQ 的距离为$\frac{|\overrightarrow{GH}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=$

$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,D 正确.

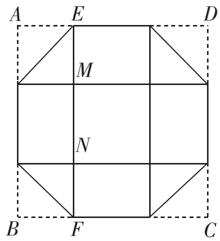


图 3

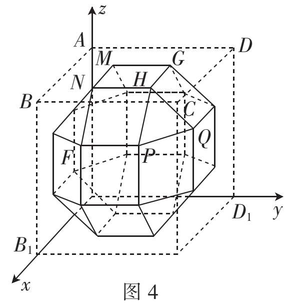


图 4

13. $(x-2)^2+(y-1)^2=5$　圆 C 的标准方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

14. $\dfrac{\pi}{4}$(或 $\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{5\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}$)　因为 $\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=1$,所以 $2\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha+1=1$,即 $\sin\alpha\cos\alpha=\cos^2\alpha$,则 $\cos\alpha=0$ 或 $\sin\alpha=\cos\alpha$,所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ 或 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 因为 $\alpha\in[0,2\pi]$,所以 α 的取值可以是 $\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{5\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}$.

15. 16　因为 $\log_2 a=\log_b 16=\dfrac{\log_2 16}{\log_2 b}$,所以 $\log_2 a\cdot\log_2 b=4$. 因为 $a>1,b>1$,所以 $\log_2 a>0$,$\log_2 b>0$. $\log_2 ab=\log_2 a+\log_2 b\geqslant 2\sqrt{\log_2 a\cdot\log_2 b}=4$,则 $ab\geqslant 16$,当且仅当 $a=b=4$ 时,等号成立.

16. $\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　设直线 l 的方程为 $x=my-\dfrac{p}{2}$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}x=my-\dfrac{p}{2},\\ y^2=2px,\end{cases}$ 得 $y^2-2pmy+p^2=0$.

由 $\Delta=4p^2m^2-4p^2>0$,解得 $m<-1$ 或 $m>1$.

由韦达定理得 $y_1y_2=p^2$.

因为 $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}$,所以 $y_2=2y_1$,解得 $y_1=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}p$,$x_1=\dfrac{y_1^2}{2p}=\dfrac{p}{4}$.

故直线 l 的斜率为 $\dfrac{y_1}{x_1+\dfrac{p}{2}}=\dfrac{\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}p}{\dfrac{p}{4}+\dfrac{p}{2}}=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

17. 解:(1)因为 $c\sin B=\sqrt{3}b\cos C$,所以 $\dfrac{c}{\sqrt{3}\cos C}=\dfrac{b}{\sin B}$. ………………………………… 1 分

由正弦定理可得 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$,则 $\dfrac{c}{\sqrt{3}\cos C}=\dfrac{c}{\sin C}$. ………………………………… 2 分

从而 $\sin C=\sqrt{3}\cos C$,即 $\tan C=\sqrt{3}$. ………………………………………………… 4 分

因为 $0<C<\pi$,所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-2ab-2ab\cos\frac{\pi}{3}$. ……………… 7 分

因为 $a+b=10, c=2\sqrt{7}$,所以 $ab=24$. ………………………………………………… 8 分

故△ABC 的面积为$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times24\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$. ………………………………… 10 分

18. 解:(1)因为 $a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}(n\geqslant2)$,所以 $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}(n\geqslant2)$,则$\{a_n\}$是等差数列.
………………………………………………………………………………………… 1 分

设$\{a_n\}$的公差为 d,由$\begin{cases}a_2=a_1+d=2,\\a_3+a_7=2a_1+8d=10,\end{cases}$解得 $a_1=d=1$. ………………………… 3 分

故 $a_n=n$. ………………………………………………………………………………… 5 分

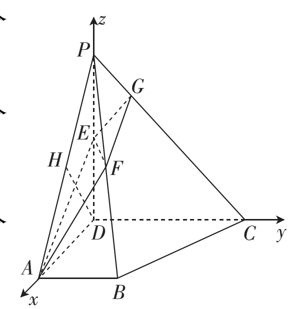
(2)满足 $k\leqslant a_n\leqslant2^k$($k$ 为正整数)的项有 b_k 项,所以 $b_k=2^k-k+1$. ………………… 9 分

$T_k=\frac{2(1-2^k)}{1-2}-\frac{(1+k)k}{2}+k=2^{k+1}-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}-2$. …………………………………… 12 分

19. (1)证明:以 D 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(4,0,0),E(0,0,2),F(2,1,2),G(0,1,3)$. ………………………………………… 2 分

$\overrightarrow{AE}=(-4,0,2),\overrightarrow{AF}=(-2,1,2),\overrightarrow{AG}=(-4,1,3)$. ………… 3 分



令$\overrightarrow{AG}=m\overrightarrow{AE}+n\overrightarrow{AF}$,即$\begin{cases}-4=-4m-2n,\\1=n,\\3=2m+2n,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=\frac{1}{2},\\n=1,\end{cases}$…… 5 分

所以$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$. 故 A,G,F,E 四点共面. ……………… 6 分

另解:①因为$\overrightarrow{FG}=(-2,0,1)$,$\overrightarrow{FG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$,所以 A,G,E,F 四点共面;

②取 PC 的中点M,连接 EM,BM(图略),证明四边形 $ABME$ 为平行四边形,从而 $AE/\!/BM/\!/FG$,得证.

(2)解:设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面 AEF 的法向量,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=-4x+2z=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=-2x+y+2z=0,\end{cases}$令 $z=2$,得 $\boldsymbol{n}=(1,-2,2)$. ………………………………… 8 分

取 AP 的中点 H,连接 DH,易得 $DH\perp$平面 ABP.

平面 ABF 的一个法向量为$\overrightarrow{DH}=(2,0,2)$. ……………………………………………… 9 分

$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DH}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DH}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DH}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………………………… 11 分

故平面 ABF 与平面 AEF 的夹角的大小为$\frac{\pi}{4}$. ………………………………………………… 12 分

20. 解:(1)设从 A,B,C 三个社区中各选取的 1 名居民的每周运动总时间超过 5 小时分别为事件 A,B,C,

则 $P(A)=\frac{1}{5},P(B)=\frac{3}{10},P(C)=\frac{1}{2}$. ………………………………………………… 2 分

设其中至少有 1 名居民每周运动总时间超过 5 小时，为事件 M，则事件 M 的对立事件为选取的 3 名居民每周运动总时间都没有超过 5 小时，

所以 $P(M)=1-P(\overline{M})=1-(1-\frac{1}{5})(1-\frac{3}{10})(1-\frac{1}{2})=\frac{18}{25}$，故选取的 3 名居民中至少有 1 名居民每周运动总时间超过 5 小时的概率为$\frac{18}{25}$. ………………………………………… 4 分

(2)解法一：设 A,B,C 三个社区的居民人数分别为 $3a,3a,4a$，

则 A 社区每周运动总时间超过 5 小时的人数为 $3a\times20\%=0.6a$，

B 社区每周运动总时间超过 5 小时的人数为 $3a\times30\%=0.9a$，

C 社区每周运动总时间超过 5 小时的人数为 $4a\times50\%=2a$，………………………………… 6 分

所以 $P=\frac{0.6a+0.9a+2a}{3a+3a+4a}=0.35$，故从这 3 个社区中随机抽取 1 名居民，该居民每周运动总时间超过 5 小时的概率为 0.35. ……………………………………………………………… 8 分

解法二：由全概率公式可得，所求概率为 $20\%\times\frac{3}{10}+30\%\times\frac{3}{10}+50\%\times\frac{4}{10}=\frac{7}{20}=0.35$. …

……………………………………………………………………………………………… 8 分

(3)因为 $X\sim N(4,\sigma^2)$，所以 $P(X>4)=0.5$.

因为 $P(X>5)=0.35$，所以 $P(4<X<5)=0.5-0.35=0.15$，

所以 $P(3<X<5)=2P(4<X<5)=0.3$. ………………………………………………… 12 分

21.(1)解：因为双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，

所以双曲线 C 的右焦点 F 到其渐近线的距离为$\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=b=2$. ……………………… 2 分

因为双曲线 C 经过点 $P(4,2)$，所以$\frac{16}{a^2}-\frac{4}{2^2}=1$，解得 $a^2=8$.

故双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$. ………………………………………………… 4 分

(2)证明：因为 $P(4,2)$，$Q(0,-2)$，D 为 PQ 的中点，所以 $D(2,0)$，$k_{PQ}=1$. …………… 5 分

设直线 l 的方程为 $y=x+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_M,y_M)$，$N(x_N,y_N)$，

所以 $k_{AQ}=\frac{y_1+2}{x_1}$，$k_{BQ}=\frac{y_2+2}{x_2}$，

直线 AQ 的方程为 $y=\frac{y_1+2}{x_1}x-2$，直线 BQ 的方程为 $y=\frac{y_2+2}{x_2}x-2$. ……………… 6 分

联立$\begin{cases}y=\frac{y_1+2}{x_1}x-2,\\ \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$可得$[1-\frac{2(y_1+2)^2}{x_1^2}]x^2+\frac{8(y_1+2)}{x_1}x-16=0$，

所以 $x_1+x_M=-\frac{\frac{8(y_1+2)}{x_1}}{1-\frac{2(y_1+2)^2}{x_1^2}}=-\frac{8x_1(y_1+2)}{x_1^2-2(y_1+2)^2}$. ……………………………… 7 分

又因为$\frac{x_1^2}{8}-\frac{y_1^2}{4}=1$,所以 $x_1+x_M=x_1+\frac{2x_1}{y_1}$,

则 $x_M=\frac{2x_1}{y_1}$,$y_M=\frac{y_1+2}{x_1}x_M-2=\frac{4}{y_1}$.

同理可得 $x_N=\frac{2x_2}{y_2}$,$y_N=\frac{4}{y_2}$. ………………………………………………………… 9 分

$k_{MN}=\frac{\frac{4}{y_1}-\frac{4}{y_2}}{\frac{2x_1}{y_1}-\frac{2x_2}{y_2}}=2\times\frac{y_2-y_1}{x_1y_2-x_2y_1}=2\times\frac{x_2-x_1}{x_1(x_2+m)-x_2(x_1+m)}=-\frac{2}{m}$, ……………… 11 分

$k_{MD}=\frac{\frac{4}{y_1}-0}{\frac{2x_1}{y_1}-2}=\frac{2}{x_1-y_1}=-\frac{2}{m}$,所以 $k_{MN}=k_{MD}$.

故 M,N,D 三点共线. ……………………………………………………………………… 12 分

22. 解:(1)$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$.

因为 $f(x)$是增函数,所以 $f'(x)=3e^x-\frac{a}{x+1}\geqslant0$ 在$(-1,+\infty)$上恒成立. …………… 2 分

即 $a\leqslant3(x+1)e^x$ 在$(-1,+\infty)$上恒成立. ……………………………………………… 3 分

令函数 $g(x)=3(x+1)e^x$,$x>-1$,$g'(x)=3(x+2)e^x>0$.

所以 $g(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增,则 $g(x)>g(-1)=0$.

所以 $a\leqslant0$,故 a 的取值范围为$(-\infty,0]$. ………………………………………………… 5 分

(2)由题意可得 $3e^x-a\ln(x+1)-\sin x-3\geqslant0$ 在$[0,+\infty)$上恒成立.

令函数 $h(x)=3e^x-a\ln(x+1)-\sin x-3$,则 $h'(x)=3e^x-\frac{a}{x+1}-\cos x$. …………… 6 分

当 $a\leqslant0$ 时,$\forall x\in[0,+\infty)$,$3e^x\geqslant3$,$-\frac{a}{x+1}\geqslant0$,$\cos x\in[-1,1]$,

所以 $h'(x)>0$,此时 $h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,故 $h(x)\geqslant h(0)=0$,符合题意. …… 8 分

当 $a>0$ 时,令函数 $u(x)=h'(x)$,则 $u'(x)=3e^x+\frac{a}{(x+1)^2}+\sin x>0$.

所以 $u(x)=h'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增.

$h'(0)=2-a$. …………………………………………………………………………………… 10 分

当 $2-a\geqslant0$,即 $0<a\leqslant2$ 时,$h'(x)\geqslant0$ 在$[0,+\infty)$上恒成立,

此时 $h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,故 $h(x)\geqslant h(0)=0$,符合题意. …………………… 11 分

当 $2-a<0$,即 $a>2$ 时,存在 x_0,使得当 $x\in(0,x_0)$时,$h'(x)<0$,

即 $h(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,此时 $h(x_0)<h(0)=0$,不符合题意.

综上,a 的取值范围是$(-\infty,2]$. …………………………………………………………… 12 分