蓉城名校联盟 2021～2022 学年度上期高中 2019 级入学联考
理科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1～5　BACDB　　　6～10　BCDDA　　　11～12　AA

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．21　　　14．1　　　15．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　　16．$\dfrac{\sqrt{119}}{3}$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）

解：（1）设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

由 $a_4-3a_2=4$， $a_3=8$.

得 $\begin{cases} a_1q^3-3a_1q=4 \\ a_1q^2=8 \end{cases}$， ……………………1 分

两式相除，得 $\dfrac{q^2-3}{q}=\dfrac{1}{2}$，即 $2q^2-q-6=0$，

解得 $q=2$ 或 $q=-\dfrac{3}{2}$ ……………………3 分

$\because q>0$

$\therefore q=2$， $a_1=2$ ……………………5 分

$\therefore a_n=2^n$； ……………………6 分

（2） $\log_2 a_n=n$ ……………………7 分

则 $b_n=n+(n+1)+(n+2)+\cdots+2n=\dfrac{(n+1)(n+2n)}{2}=\dfrac{3n(n+1)}{2}$ ……………………8 分

$\therefore \dfrac{1}{b_n}=\dfrac{2}{3n(n+1)}=\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$ ……………………9 分

$\therefore S_n=\dfrac{2}{3}(1-\dfrac{1}{2})+\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4})+\cdots+\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n})+\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$

$=\dfrac{2}{3}(1-\dfrac{1}{n+1})$ ……………………11 分

$=\dfrac{2n}{3(n+1)}$. ……………………12 分

18．（12 分）

解：（1）填写 2×2 列联表如下：

	严格遵守交通法第 47 条规定	不严格遵守交通法第 47 条规定	合计
年均违法记录不超过 3 次	28	42	70
年均违法记录超过 3 次	4	26	30
合计	32	68	100

……………………4 分

$K^2=\dfrac{100\times(28\times26-42\times4)^2}{70\times30\times32\times68}=\dfrac{350}{51}\approx6.86>6.635$ ……………………7 分

所以，有超过 99%的把握认为机动车驾驶员年均违法记录超过 3 次与不严格遵守交通法第 47 条规定有关． ……………………8 分

（2）总共 10 人，其中年均交通违法记录次数为 8 次的有 3 人．

所求概率 $P=\dfrac{C_3^2C_7^2+C_3^3C_7^1}{C_{10}^4}=\dfrac{70}{210}=\dfrac{1}{3}$． ……………………12 分

19．（12 分）

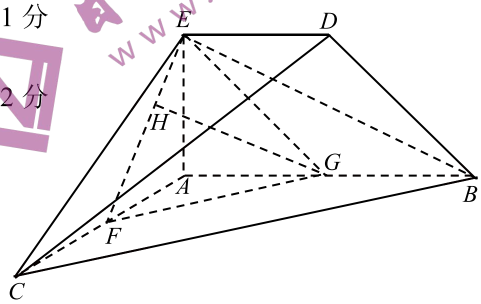
解：（1）连接 FG， EG．

$\because F$， G 分别为 AC， AB 中点，

$\therefore FG/\!/CB$， ……………………1 分

又 $\because FG\not\subset$ 平面 BCD， $BC\subset$ 平面 BCD

$\therefore FG/\!/$ 平面 BCD ……………………2 分



梯形 $ABDE$ 中， $AB\perp AE$， $DE\perp AE$，

$\therefore ED/\!/AB$， 即 $ED/\!/GB$

$\because AB=2$， $ED=1$， G 为 AB 中点，

$\therefore ED=GB$

所以四边形 $GBDE$ 为平行四边形，

$\therefore EG/\!/DB$， ……………………4 分

又 $\because EG\not\subset$ 平面 BCD， $BD\subset$ 平面 BCD

$\therefore EG/\!/$ 平面 BCD

$\because EG\cap FG=G$，

$\therefore$ 平面$EFG/\!/$ 平面 BCD． ……………………5 分

$\because GH\subset$ 平面EFG，

$\therefore GH/\!/$ 平面 BCD. ……………………6 分

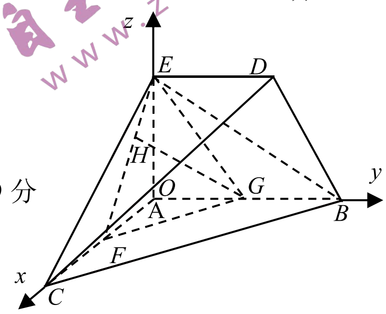
（2）$\because$ 平面 $ABDE\perp$ 平面 ABC 于 AB，$AB\perp AC$，$AC\subset$ 平面 ABC

$\therefore AC\perp$ 平面 $ABDE$. ……………………7 分

如图，以 A 为原点，AC，AB，AE 分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系．

则 $C(2,0,0)$， $B(0,2,0)$， $E(0,0,1)$， $D(0,1,1)$

$\overrightarrow{CB}=(-2,2,0)$， $\overrightarrow{CE}=(-2,0,1)$， $\overrightarrow{DB}=(0,1,-1)$， ……………………8 分



设平面 BCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}=-2a+2b=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DB}=b-c=0\end{cases}$

取 $b=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$， ……………………9 分

设平面 BCE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=-2x+2y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=-2x+z=0\end{cases}$

取 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,1,2)$， ……………………10 分

则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1+1+2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$． ……………………11 分

设二面角 $E-BC-D$ 的平面角为 θ，由图知 θ 为锐角，

则 $\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$． ……………………12 分

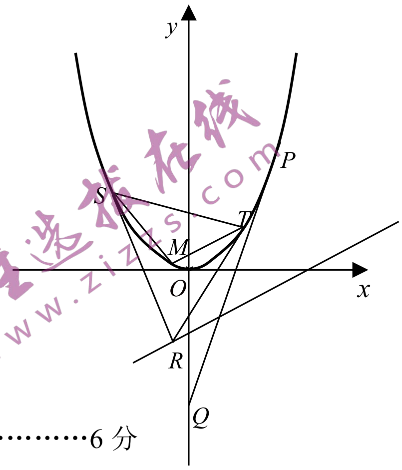
20．（12 分）

解：（1） $y=x^2$ 求导得 $y'=2x$ ……………………1 分

设 $P(x_1,x_1^2)$， $x_1\neq 0$，

l 方程为 $y-x_1^2=2x_1(x-x_1)$，化简得 $y=2x_1x-x_1^2$ ① ……………………2 分

当 $x=0$ 时，$y=-x_1^2$，则 $Q(0,-x_1^2)$



线段 PQ 的中点坐标为 $(\frac{x_1}{2},0)$， ……………………3 分

中垂线方程为 $y=-\frac{1}{2x_1}(x-\frac{x_1}{2})$，即 $y=-\frac{1}{2x_1}x+\frac{1}{4}$，……4 分

所以，线段 PQ 的中垂线过定点 $(0,\frac{1}{4})$． ……………………5 分

（2）设 $R(x_0,\frac{1}{2}x_0-1)$，$S(x_2,y_2)$，$T(x_3,y_3)$

由（1）中方程①知切线 $RS:y=2x_2x-x_2^2$，$RT:y=2x_3x-x_3^2$ ……………………6 分

$R(x_0,\frac{x_0}{2}-1)$ 分别代入，得

$x_2^2-2x_0x_2+\frac{x_0}{2}-1=0$，$x_3^2-2x_0x_3+\frac{x_0}{2}-1=0$

故 x_2，x_3 为方程 $x^2-2x_0x+\frac{x_0}{2}-1=0$ 的两根

则 $x_2+x_3=2x_0$，$x_2x_3=\frac{x_0}{2}-1$ ……………………7 分

直线 ST 的方程为 $y-x_2^2=\frac{x_3^2-x_2^2}{x_3-x_2}(x-x_2)$，

化简得 $y=(x_2+x_3)x-x_2x_3$，即 $y=2x_0x-\frac{x_0}{2}+1$

$\therefore |ST|=\sqrt{1+4x_0^2}\,|x_2-x_3|=2\sqrt{1+4x_0^2}\cdot\sqrt{x_0^2-\frac{1}{2}x_0+1}$． ……………………8 分

抛物线上 S、T 之间到直线 ST 的距离最大的点为平行于 ST 的切线的切点，

设 $M(x_4,x_4^2)$，则 $2x_4=2x_0$，$\therefore x_4=x_0$，$M(x_0,x_0^2)$， ……………………9 分

M 到直线 ST 的距离 $d=\dfrac{|x_0^2-\frac{x_0}{2}+1|}{\sqrt{1+4x_0^2}}$． ……………………10 分

则 $S_{\triangle RST}=\frac{1}{2}|ST|\cdot d=\dfrac{|x_0^2-\frac{x_0}{2}+1|}{2\sqrt{1+4x_0^2}}\cdot 2\sqrt{1+4x_0^2}\cdot\sqrt{x_0^2-\frac{x_0}{2}+1}$

$=\sqrt{(x_0^2-\frac{1}{2}x_0+1)^3}=\sqrt{[(x_0-\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}]^3}$ ……………………11 分

当 $x_0=\frac{1}{4}$ 时，$S_{\triangle RST}$ 有最小值 $\frac{15\sqrt{15}}{64}$． ……………………12 分

21．（12 分）

解：（1）$f'(x)=-2(x+1)e^x+a(x^2+2x+1)=(x+1)(-2e^x+ax+a)$，

……………………1 分

因为 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 内为减函数，

所以 $f'(x)\le 0$，即 $-2e^x+ax+a\le 0\Leftrightarrow a\le\frac{2e^x}{x+1}$ ……………………2 分

设 $g(x)=\dfrac{2e^{x}}{x+1}(x>-1)$， $g'(x)=\dfrac{2xe^{x}}{(x+1)^{2}}$ ……………………3 分

则 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 内为减函数，在 $(0,+\infty)$ 内为增函数， ……………………4 分

$\therefore g(x)_{\min}=g(0)=2$

$\therefore a\le 2$． ……………………5 分

（2） $f(x)=-2xe^{x}+e(\dfrac{1}{3}x^{3}+x^{2}+x)+\dfrac{1}{3e}$，

则 $f'(x)=-2(x+1)e^{x}+e(x^{2}+2x+1)=(x+1)(-2e^{x}+ex+e)$．

设 $h(x)=-2e^{x}+ex+e\ (x>0)$， 则 $h'(x)=-2e^{x}+e$ ……………………6 分

由 $h'(x)>0$ 得 $x<\ln\dfrac{e}{2}$， 由 $h'(x)<0$ 得 $x>\ln\dfrac{e}{2}$.

于是 $h(x)$ 在 $(-\infty,\ln\dfrac{e}{2}]$ 上为增函数； $h(x)$ 在 $[\ln\dfrac{e}{2},+\infty)$ 上为减函数；……………………7 分

$\because h(\ln\dfrac{e}{2})=e\ln\dfrac{e}{2}>0$， $h(-1)=-\dfrac{2}{e}<0$

$\therefore \exists x_{0}\in(-1,\ln\dfrac{e}{2})$， $h(x_{0})=0$； 在 $(\ln\dfrac{e}{2},+\infty)$ 内有 $h(1)=0$． ……………………8 分

则在 $(-\infty,x_{0})$ 内 $h(x)<0$； 在 $(x_{0},1)$ 内 $h(x)>0$； 在 $(1,+\infty)$ 内 $h(x)<0$. ……………9 分

故在 $(-\infty,-1)$ 内 $f'(x)>0$， $f(x)$ 为增函数；

在 $(-1,x_{0})$ 内 $f'(x)<0$， $f(x)$ 为减函数；

在 $(x_{0},1)$ 内 $f'(x)>0$， $f(x)$ 为增函数；

在 $(1,+\infty)$ 内 $f'(x)<0$， $f(x)$ 为减函数. ……………………10 分

$\therefore f(x)$ 有极大值 $f(-1)$ 和 $f(1)$， 有极小值 $f(x_{0})$．

$\because f(-1)=\dfrac{2}{e}-\dfrac{e}{3}+\dfrac{1}{3e}=\dfrac{7-e^{2}}{3e}<0$， $f(x_{0})<f(-1)<0$．

$f(1)=\dfrac{e}{3}+\dfrac{1}{3e}>0$， $f(3)=-6e^{3}+21e+\dfrac{1}{3e}=3e(7-2e^{2})+\dfrac{1}{3e}<0$． ……………………11 分

所以，当 $x\in(-\infty,-x_{0})$ 时， $f(x)\le f(-1)<0$， $f(x)$ 无零点；

当 $x\in[x_{0},1]$ 时， $f(x)$ 有一个零点；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f(x)$ 有一个零点.

综上所述， $f(x)$ 有两个零点. ……………………12 分

22．（10 分）

解：（1）由 $\begin{cases}x=2+3t\\ y=4t\end{cases}$ 消去参数得直线 l 的普通方程为 $x=2+\dfrac{3}{4}y$，

即 $4x-3y-8=0$； ……………………2 分

由 $\rho=6\cos\theta$， 得 $\rho^{2}=6\rho\cos\theta$，

化为直角坐标方程，得 $x^{2}+y^{2}=6x$． ……………………3 分

$\because 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore y=\rho\sin\theta\ge 0$． ……………………4 分

$\therefore C$ 的直角坐标方程为 $x^{2}+y^{2}-6x=0(y\ge 0)$； ……………………5 分

（2）$C:(x-3)^2+y^2=9(y\ge 0)$，

表示圆心为 $C(3,0)$，半径为 $r=3$ 的半圆.

圆心到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|4\times 3-3\times 0-8|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{4}{5}$，　　　　……………………6 分

如图，直线 l 与半圆 C 相交，则曲线 C 上的点到直线 l 的距离的最小值为 0，

……………………7 分

直线 l 左上方的圆弧上的点到直线 l 的最大距离为 $r-d=\dfrac{11}{5}$，

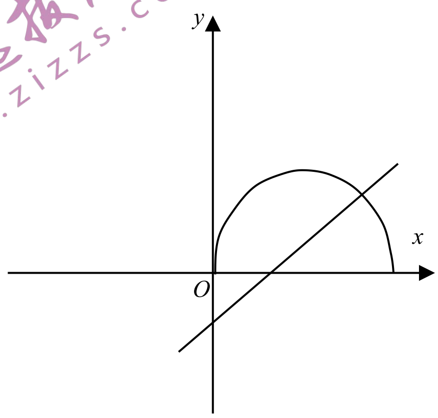
……………………8 分

在直线 l 右下方的圆弧上，点 $(6,0)$ 到直线 l 的距离最大，为 $\dfrac{|4\times 6-3\times 0-8|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{16}{5}$.

……………………9 分

所以，曲线 C 上的点到直线 l 的距离的最小值为 0，最大值为 $\dfrac{16}{5}$.

……………………10 分

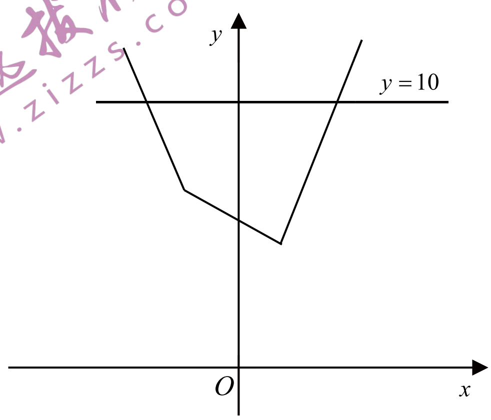


23.（10 分）

解：（1）$g(x)=f(x)+|x-1|=3|x-1|+|2x+3|=\begin{cases}5x，& x\ge 1\\ -x+6，& -\dfrac{3}{2}\le x\le 1\\ -5x，& x\le -\dfrac{3}{2}\end{cases}$　　……………………2 分

$g(x)$ 的图象如图所示，　　……………………4 分

结合计算，得不等式的解集为 $\{x|-2\le x\le 2\}$；　　……………………5 分



（2）$|2x-2|+|2x+3|\geq|(2x-2)-(2x+3)|=5$， ……………………6 分

当且仅当 $(2x-2)(2x+3)\leq 0$，即 $-\dfrac{3}{2}\leq x\leq 1$ 时，等号成立，

$\therefore f(x)$ 的最小值为 5，则 $a+3b=5$， ……………………7 分

由柯西不等式，$(a^2+b^2)(1^2+3^2)\geq(a+3b)^2=25$，

即 $a^2+b^2\geq\dfrac{5}{2}$， ……………………8 分

当且仅当 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{3}$，即 $b=3a$ 等号成立，

由 $\begin{cases}a+3b=5\\ b=3a\end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{3}{2}$． ……………………9 分

$\therefore a^2+b^2$ 的最小值为 $\dfrac{5}{2}$． ……………………10 分