2023 年高考素养调研三模理科数学试题

参考答案及评分标准

一、选择题（本大题共 12 小题，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	C	B	B	C	D	A	A	B	D	C

二、填空题（本大题共 4 小题，共 20 分）

13． 5　　14． $8\sqrt{3}$　　15． $\dfrac{6}{7}$　　16． $(-8,4)$

三、解答题

17．

(1)由 $3a_{n+1}-a_n=6$ 可得 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2\Rightarrow a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3)$，

因为 $a_1=1$，所以 $a_1-3=-2$，所以 $\{a_n-3\}$ 是以 -2 为首项为，$\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列；…4 分

(2)由(1)知 $a_n-3=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，因为 $b_n=-n(a_n-3)$，所以 $b_n=2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore S_n=2+4\cdot\frac{1}{3}+6\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+2n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，$\frac{1}{3}S_n=2\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+6\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+2n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$

两式相减可得

$$\frac{2}{3}S_n=2+2\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-2n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{2\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}}-2n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

故 $S_n=\frac{9}{2}-\left(3n+\frac{9}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n$，因为 $n\in\mathbf{N}^*$，$\left(3n+\frac{9}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n>0$，

所以 $S_n=\frac{9}{2}-\left(3n+\frac{9}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{9}{2}$　　…12 分

18．

(1)证明：在题图 1 中，因为 $AB=2BC=2CD$，且 D 为 AB 的中点，

所以 $\angle ACB=90°$，又 E 为 AC 的中点，所以 $DE\parallel BC$

在题图 2 中，$CE\perp DE, PE\perp DE$，且 $CE\cap PE=E$，

所以 $DE\perp$ 平面 CEP，又 $PC\subset$ 平面 BCP，所以 $CP\perp DE$；　　…5 分

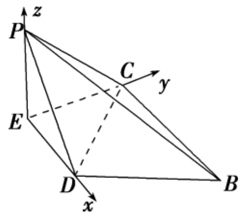
(2)因为 $CE\perp$ 平面 DEP，所以 $CE\perp DE, PE\perp CE$，而 $PE\perp DE$

以 E 为坐标原点，$\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EP}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系.

在题图 1 中，设 $BC=2a$，则 $AB=4a, AC=2\sqrt{3}a, AE=CE=\sqrt{3}a, DE=a$

则 $P\left(0,0,\sqrt{3}a\right),D\left(a,0,0\right),C\left(0,\sqrt{3}a,0\right),B\left(2a,\sqrt{3}a,0\right)$

所以 $\overrightarrow{DP}=\left(-a,0,\sqrt{3}a\right),\overrightarrow{BC}=\left(-2a,0,0\right),\overrightarrow{CP}=\left(0,-\sqrt{3}a,\sqrt{3}a\right)$



设平面 BCP 的法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{CP}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-2ax=0\\ -\sqrt{3}ay+\sqrt{3}az=0\end{cases}$

令 $y=1$，则 $z=1$，所以 $\mathbf{n}=(0,1,1)$，设直线 DP 与平面 BCP 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\mathbf{n},\overrightarrow{DP}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{DP}\right|}{|\mathbf{n}|\cdot\left|\overrightarrow{DP}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{2}\times 2a}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

所以直线 DP 与平面 BCP 所成的角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.　　　　…12 分

19.

(1)由 $X\sim N\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{4}\right)$，易知 $\mu=\dfrac{5}{2},\sigma=\dfrac{1}{2}$，

所以 $P\left(\dfrac{3}{2}\le X\le 3\right)=P\left(\mu-2\sigma\le X\le\mu+\sigma\right)\approx 0.6827+\dfrac{0.9545-0.6827}{2}=0.8186$，

则预估该地区某辆家用汽车导航精确度在 $\left[\dfrac{3}{2},3\right]$ 的概率为 0.8186；　　　　…6 分

(2)由题意可得 Y 可能的取值为 $0,1,2$，

则 $P(Y=0)=\dfrac{C_{27}^{2}}{C_{30}^{2}}=\dfrac{117}{145},P(Y=1)=\dfrac{C_{27}^{1}C_{3}^{1}}{C_{30}^{2}}=\dfrac{27}{145},P(Y=2)=\dfrac{C_{27}^{0}C_{3}^{2}}{C_{30}^{2}}=\dfrac{1}{145}$

所以 Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\dfrac{117}{145}$	$\dfrac{27}{145}$	$\dfrac{1}{145}$

所以数学期望 $E(Y)=\dfrac{117}{145}\times 0+\dfrac{27}{145}\times 1+\dfrac{1}{145}\times 2=\dfrac{29}{145}$　　　　…12 分

20.

(1) ΔAF_1F_2 中由面积公式得 $a\cdot\sqrt{3}=b\cdot 2c$，即 $\sqrt{3}a=2\sqrt{a^2-1}$，得 $a^2=4$，

椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$；　　　　…4 分

(2)假设存在点 R 使得 $\angle ORP+\angle ORQ=\dfrac{\pi}{2}$，设 $R(0,m)$，

$\because$ $\angle ORP+\angle ORQ=\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore$ $\angle ORQ=\angle OPR$，即 $\tan\angle ORQ=\tan\angle OPR$，

$\therefore$ $\dfrac{|OQ|}{|OR|}=\dfrac{|OR|}{|OP|}$，即 $|OR|^2=|OP||OQ|$，

直线 $x=x_0$ 与椭圆 C_1 交于不同的两点 C,D，易知 C,D 关于 x 对称，

设 $C(x_0,y_0)$，则 $D(x_0,-y_0)$（$y_0\neq\pm1, y_0\neq 0$），

由⑴知 $A(0,1)$，直线 AC 的方程是 $y=\dfrac{y_0-1}{x_0}x+1$，令 $y=0$ 得 $x_P=-\dfrac{x_0}{y_0-1}$，

直线 AD 方程是 $y=\dfrac{y_0+1}{-x_0}x+1$，令 $y=0$ 得 $x_Q=\dfrac{x_0}{y_0+1}$，

由 $|OR|^2=|OP||OQ|$，得 $m^2=\dfrac{x_0^2}{|y_0^2-1|}$，又 $C(x_0,y_0)$ 在椭圆上，所以 $\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，

$\therefore m^2=4$，即 $m=\pm2$

所以存在点 $R(0,\pm2)$，使得 $\angle ORP+\angle ORQ=\dfrac{\pi}{2}$ 成立. …12 分

21.

⑴由已知，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$\because f'(x)=\dfrac{2a}{x}-xe^x=\dfrac{2a-x^2e^x}{x}$

①当 $a<0$ 时，$2a-x^2e^x<0$，从而 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减，无极值点.

②当 $a>0$ 时，令 $g(x)=2a-x^2e^x$，

$\because g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，$g(0)=2a>0, g\left(\sqrt{2a}\right)=2a-2ae^{\sqrt{2a}}=2a\left(1-e^{\sqrt{2a}}\right)<0$，

所以存在唯一的 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $g(x_0)=0$

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$

所以当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且仅有一个极值点

综上所述，当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 无极值点；当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 只有一个极值点…6 分

⑵证明：由⑴知 $f'(x)=\dfrac{2a-x^2e^x}{x}$，令 $g(x)=2a-x^2e^x$，由 $2a>e$ 得 $g(1)=2a-e>0$

所以 $g(x)=0$ 在 $(1,+\infty)$ 内有唯一解，从而 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有唯一解，不妨设为 x_0，

则 $f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，所以 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值点

令 $h(x)=\ln x-x+1$，则当 $x>1$ 时，$h'(x)=\dfrac{1}{x}-1<0$，故 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递减

从而当 $x>1$ 时，$h(x)<h(1)=0$，所以 $\ln x<x-1$

从而当 $2a>e$ 时，$\ln 2a>1$，且 $f(\ln 2a)=2a\ln(\ln 2a)-(\ln 2a-1)e^{\ln 2a}<2a(\ln 2a-1)-(\ln 2a-1)2a=0$

又 $\because f(1)=0$，故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内有唯一的零点 …12 分

22.

(1)直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=a+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}t \\ y=1-\dfrac{\sqrt{5}}{5}t \end{cases}$ （t 为参数），

消去参数 t 得直线 l 的普通方程为 $x+2y-a-2=0$.

由 $\rho^2=x^2+y^2,\rho\cos\theta=x,\rho\sin\theta=y$，

得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x=0$，即 $(x-1)^2+y^2=1$，

因为圆 C 关于直线 l 对称，所以圆心 $(1,0)$ 在直线 $x+2y-a-2=0$ 上，所以 $a=-1$；…5 分

(2)由点 A,B 在圆 $\rho=2\cos\theta$ 上，且 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$，不妨设 $\angle AOx=\alpha$，则 $\angle BOx=\alpha-\dfrac{\pi}{3}$，

∴ ΔAOB 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}|OA||OB|\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}|2\cos\alpha|\left|2\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left[\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\right]\le\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，

∴ ΔAOB 面积的最大值为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.　　…10 分

23.

(1)由题意知 $f(x)=\begin{cases} -3x, x<-\dfrac{1}{2} \\ 1-x,-\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{1}{4} \\ 3x, x\ge\dfrac{1}{4} \end{cases}$，令 $f(x)=2$，得 $x=\pm\dfrac{2}{3}$，

∴ $f(x)<2$ 的解集为 $\left\{x\left|-\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{2}{3}\right.\right\}$；　　…5 分

(2)由题意可知，$M=\dfrac{3}{4}$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$，$a+b=(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=2+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\ge4$，

当且仅当 $a=b=2$ 时等号成立.　　…10 分