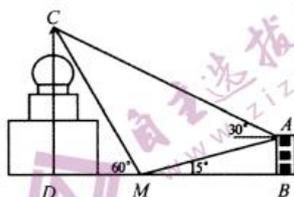






7. 设  $a > 0, b > 0$ , 若  $2a + b = 2$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$  的最小值为  
 A. 2                      B. 4                      C. 6                      D. 8
8. 5G 是第五代移动通信技术的简称, 其意义在于万物互联, 即所有人和物都将存在于有机的数字生态系统中, 它把以人为中心的通信扩展到同时以人与物为中心的通信, 将会为社会生活与生产方式带来巨大的变化. 目前我国最高的 5G 基站海拔 6500 米. 从全国范围看, 中国 5G 发展进入了全面加速阶段, 基站建设进度超过预期. 现有 8 个工程队共承建 10 万个基站, 从第二个工程队开始, 每个工程队所建的基站数都比前一个工程队少  $\frac{1}{6}$ , 则第一个工程队承建的基站数(单位: 万) 约为  
 A.  $\frac{10 \times 6^8}{6^8 - 5^8}$               B.  $\frac{10 \times 6^7}{6^8 - 5^8}$               C.  $\frac{80 \times 6^7}{6^8 - 5^8}$               D.  $\frac{10 \times 6^6}{6^8 - 5^8}$
9. 在平面直角坐标系中, 直线  $x - y + 1 = 0$  与圆  $C: x^2 + y^2 - 2x + 8y + 13 = 0$  相交于 A, B 两点, P 为圆 C 上的动点, 则  $\triangle PAB$  面积的最大值为  
 A.  $2 + 2\sqrt{2}$               B. 2                      C.  $1 + \sqrt{2}$               D.  $2 + \sqrt{2}$
10. 圣·索菲亚教堂(英语: Saint Sophia Cathedral) 坐落于中国黑龙江省哈尔滨市道里区索菲亚广场, 是一座始建于 1907 年拜占庭风格的东正教教堂, 距今已有 114 年的历史, 是哈尔滨的标志性建筑. 1996 年经国务院批准, 被列为第四批全国重点文物保护单位, 是每一位到哈尔滨旅游的游客拍照打卡的必到景点. 其中央主体建筑集球, 圆柱, 棱柱于一体, 极具对称之美, 可以让游客从任何角度都能领略它的美. 小明同学为了估算索菲亚教堂的高度, 在索菲亚教堂的正东方向找到一座建筑物 AB, 高为  $(15\sqrt{3} - 15)$  m, 在它们之间的地面上的点 M (B, M, D 三点共线) 处测得楼顶 A, 教堂顶 C 的仰角分别是  $15^\circ$  和  $60^\circ$ , 在楼顶 A 处测得塔顶 C 的仰角为  $30^\circ$ , 则小明估算索菲亚教堂的高度为  
 A. 20m                      B. 30m                      C.  $20\sqrt{3}$  m                      D.  $30\sqrt{3}$  m



11. 如果对定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数  $f(x)$ , 满足对于任意两个不相等的正实数  $x_1, x_2$ , 都有  $\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ , 则称函数  $y = f(x)$  为“F 函数”, 下列函数为“F 函数”的是  
 A.  $f(x) = e^{-|x|}$               B.  $f(x) = \ln|x|$               C.  $f(x) = x^2$               D.  $f(x) = x|x|$
12. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 以线段  $F_1 F_2$  为直径的圆与双曲线 C 的一条渐近线交于 M 点,  $|MF_1| > |MF_2|$ , 且线段  $MF_1$  的中点在另外一条渐近线上, 则此双曲线的离心率为  
 A.  $\sqrt{2}$                       B.  $\sqrt{3}$                       C.  $\sqrt{3} + 1$                       D. 2



## 第 II 卷

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知函数  $f(x) = -2x^3 + x + 3$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

14. 已知非零向量  $a, b$  满足  $|b| = 4|a|$ , 且  $a \perp (2a + b)$ , 则  $a$  与  $b$  的夹角为\_\_\_\_\_.

15. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)\cos\varphi + \cos(\omega x + \varphi)\sin\varphi$  (其中  $\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象相邻的两个对称轴之间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ , 且满足  $f(\frac{\pi}{12} + x) = f(\frac{\pi}{12} - x)$ , 则  $\varphi =$ \_\_\_\_\_.

16. 已知长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = 2BC = 4$ ,  $E$  是  $C_1D_1$  的中点, 且异面直线  $AD_1$  与  $CE$  所成的角是  $60^\circ$ . 则在此长方体的表面上, 从  $A_1$  到  $C$  的路径中, 最短路径的长度为\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

17. (本小题满分 12 分)

已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $S_5 = 25$ , 且  $a_3 - 1, a_4 + 1, a_7 + 3$  成等比数列.

(I) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 设  $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

18. (本小题满分 12 分)

奶茶是年轻人非常喜欢的饮品. 某机构对于奶茶的消费情况在一商圈附近做了一些调查, 发现女性喜欢奶茶的人数明显高于男性, 每月喝奶茶的次数也比男性高, 但单次奶茶消费金额男性似乎明显高于女性. 针对每月奶茶消费是否超过百元进行调查, 已知在调查的 200 人中女性人数是男性人数的 4 倍, 统计如下:

	超过百元	未超过百元	合计
男	8		
女		144	
合计			200

(I) 完成如上  $2 \times 2$  列联表, 并说明是否有 90% 的把握认为月消费奶茶超过百元与性别有关?

(II) 在月消费超百元的调查者中, 同时进行对于品牌喜好的调查. 发现喜欢 A 品牌的男女均为 3 人, 现从喜欢 A 品牌的这 6 人中抽取 2 人送纪念品, 求这两人恰好都是女性的概率.

附:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.010	0.001
$k_0$	2.706	6.635	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$$

数学(文) 试卷第 3 页(共 4 页)

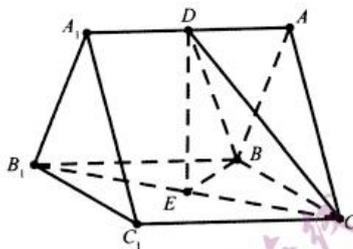


19. (本小题满分 12 分)

如图,在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AB = AC = 5$ ,  $BB_1 = BC = 6$ ,  $D, E$  分别是  $AA_1$  和  $B_1C$  的中点.

(I) 证明:  $DE \perp$  平面  $BB_1C_1C$ ;

(II) 求三棱锥  $D - EBC$  的体积与三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  体积的比值.



20. (本小题满分 12 分)

已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的准线为  $l$ , 过抛物线上一点  $B$  向  $x$  轴做垂线, 垂足恰好为抛物线  $C$  的焦点  $F$ , 且  $|BF| = 4$ .

(I) 求抛物线  $C$  的方程;

(II) 设  $l$  与  $x$  轴的交点为  $A$ , 过  $x$  轴上的一个定点  $(1, 0)$  的直线  $m$  与抛物线  $C$  交于  $D, E$  两点. 记直线  $AD, AE$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 若  $k_1 + k_2 = \frac{1}{3}$ , 求直线  $m$  的方程.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $F(x) = \frac{\ln x}{x-1} - \frac{a}{x+1}$

(I) 设函数  $h(x) = (x-1)F(x)$ , 当  $a = 2$  时, 证明: 当  $x > 1$  时,  $h(x) > 0$ ;

(II) 若  $F(x)$  有两个不同的零点, 求  $a$  的取值范围.

请考生在 22、23 题中任选一题做答, 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

已知某曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2\cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases}$  ( $\varphi$  为参数).

(I) 若  $P(x, y)$  是曲线  $C$  上的任意一点, 求  $x + 2y$  的最大值;

(II) 已知过  $C$  的右焦点  $F$ , 且倾斜角为  $\alpha (0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2})$  的直线  $l$  与  $C$  交于  $D, E$  两点,

设线段  $DE$  的中点为  $M$ , 当  $\frac{\sqrt{3}}{16} (\frac{1}{|FE|} + \frac{1}{|FD|}) = |FM|$  时, 求直线  $l$  的普通方程.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数  $f(x) = |x+a| + |x+4a|$ .

(I) 若  $a = 1$ , 求不等式  $f(x) \leq 7$  的解集;

(II) 对于任意的正实数  $m, n$ , 且  $3m + n = 1$ , 若  $f(x) \geq \frac{mn}{m^2 + n}$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.



2021年东北三省四市教研联合体高考模拟试卷(一) 数学(文科) 答案

一、1. C 2. A 3. B 4. C 5. C 6. C 7. B 8. B 9. A 10. D 11. C 12. D

二、13.  $5x + y - 7 = 0$  14.  $\frac{2}{3}\pi$  15.  $\frac{\pi}{6}$  16.  $4\sqrt{2}$

三、

17. 解:(I)  $\because S_5 = 5a_3 = 25, \therefore a_3 = 5$  ..... 2分

设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$ ,由 $a_3 = 1, a_2 = 1, a_1 = 3$ 成等比数列得

$(6 + d)^2 = 4(8 + 4d) \therefore d^2 - 4d + 4 = 0 \therefore d = 2$  ..... 4分

$\therefore a_n = a_3 + (n - 3)d = 2n - 1$  ..... 6分

(II)  $\because b_n = \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1})$  ..... 9分

$\therefore T_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1}) = \frac{n}{2n + 1}$  ..... 12分

18. 解:(I) 设男性每月奶茶消费未超过百元的人数为 $x$ ,则 $8 + x + 4(8 + x) = 200$

$\therefore x = 32$  ..... 1分

	超过百元	未超过百元	合计
男	8	32	40
女	16	144	160
合计	24	176	200

..... 2分

$K^2$ 的观测值 $k = \frac{200(8 \times 144 - 32 \times 16)^2}{40 \times 160 \times 24 \times 176} = \frac{100}{33} \approx 3.030 > 2.706$  ..... 5分

因此,有90%的把握认为月消费奶茶超过百元与性别有关. .... 6分

(II) 设喜欢A品牌的女性为 $A_1, A_2, A_3$ ,男性为 $B_1, B_2, B_3$ ,

$\therefore$ 抽取2人有 $(A_1A_2)(A_1A_3)(A_2A_3)(A_1B_1)(A_1B_2)(A_1B_3)(A_2B_1)(A_2B_2)(A_2B_3)$

$(A_3B_1)(A_3B_2)(A_3B_3)(B_1B_2)(B_1B_3)(B_2B_3)$ ,共15种 ..... 8分

设“这两人恰好都是女性”为事件 $M$ ,则事件包含 $(A_1A_2)(A_1A_3)(A_2A_3)$ ,共3种 ..... 10分

$\therefore P(M) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

答:抽取的这两人恰好都是女性的概率为 $\frac{1}{5}$ . .... 12分

19. 解:(I) 取 $BC$ 的中点为 $F$ ,连结 $AF, EF, \because BB_1 \perp$ 平面 $ABC, AF \subset$ 平面 $ABC \therefore BB_1 \perp AF$  ..... 1分

$\because AB = AC, BF = CF \therefore BC \perp AF$  ..... 2分

$\because BB_1 \cap BC = B \therefore AF \perp$ 平面 $BB_1C_1C$  ..... 3分

$\therefore AD \parallel \frac{1}{2}BB_1, EF \parallel \frac{1}{2}BB_1$

∴ 四边形  $DEFA$  为平行四边形  
 ∴  $DE \parallel AF$  ..... 4 分  
 ∴  $DE \perp$  平面  $BB_1C_1C$  ..... 5 分

(II) 三棱锥  $D - EBC$  的体积为  $\frac{1}{3}$  乘以底面积乘高, 所以

$$V_{D-EBC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCE} \cdot DE = \frac{1}{3} \times \frac{6 \times 3}{2} \times 4 = 12. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

直三棱柱的体积为底面积乘以高, 所以

$$V_{ABC-A_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times 6 = 72. \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

所以三棱锥  $D - EBC$  的体积与三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  体积的比值为  $\frac{1}{6}$ .  
 ..... 12 分

20. 解: (I) 由题意  $B(\frac{p}{2}, 4)$  ..... 1 分

代入  $y^2 = 2px$   
 得  $p^2 = 16$  ..... 2 分

$p = 4$  ..... 3 分

∴ 抛物线  $C$  的方程为  $y^2 = 8x$  ..... 4 分

(II) 当直线  $m$  的斜率不存在时,  $k_1 + k_2 = 0$  与题意不符, 所以直线的斜率一定存在, 设直线  $m$  的方程为  $y = k(x - 1)$  代入到  $y^2 = 8x$  中,

$$k^2 x^2 - (2k^2 + 8)x + k^2 = 0$$

设  $D(x_1, y_1), E(x_2, y_2)$ , 则  $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2k^2 + 8}{k^2} \\ x_1 x_2 = \frac{k^2}{k^2} = 1 \end{cases}, \Delta > 0$  恒成立 ..... 7 分

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= \frac{y_1}{x_1 + 2} + \frac{y_2}{x_2 + 2} \\ &= \frac{k(x_1 - 1)}{x_1 + 2} + \frac{k(x_2 - 1)}{x_2 + 2} \\ &= \frac{k[2x_1 x_2 + (x_1 + x_2) - 4]}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} \\ &= \frac{8k}{9k^2 + 16} = \frac{1}{3} \quad \dots\dots 9 \text{ 分} \end{aligned}$$

∴  $k = \frac{4}{3}$  ..... 10 分

所以直线  $m$  的方程为  $4x - 3y - 4 = 0$  ..... 12 分

21. 解: (I)  $h'(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0$ , ..... 2 分

所以  $h(x)$  在  $(1, +\infty)$  上为单调递增函数, ..... 3 分

且  $h(1) = 0$ , ..... 4 分

当  $x > 1$  时,  $h(x) > 0$ , ..... 5 分



(II) 设函数  $f(x) = \ln x - \frac{a(x-1)}{x+1}$ , 则  $f'(x) = \frac{x^2 + 2(1-a)x + 1}{x(x+1)^2}$ . ..... 6分

令  $g(x) = x^2 + 2(1-a)x + 1$ , 当  $a \leq 1$  时, 当  $x > 0$  时,  $g(x) > 0$ , ..... 7分

当  $1 < a \leq 2$  时,  $\Delta = 4a^2 - 8a \leq 0$ , 得  $g(x) \geq 0$ ,  
所以当  $a \leq 2$  时,  $f'(x) \geq 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上为单调递增函数. 此时  $g(x)$  至

多有一个零点,  $F(x) = \frac{1}{x-1}f(x)$  至多一个零点不符合题意舍去. .... 8分

当  $a > 2$  时, 有  $\Delta = 4a^2 - 8a > 0$ , 此时  $g(x)$  有两个零点, 设为  $t_1, t_2$ , 且  $t_1 < t_2$ .  
又因为  $t_1 + t_2 = 2(a-1) > 0, t_1 t_2 = 1$ , 所以  $0 < t_1 < 1 < t_2$ . .... 9分

得  $f(x)$  在  $(0, t_1), (t_2, +\infty)$  为单调递增函数,  
在  $(t_1, t_2)$  上为单调递减函数, 且  $f(1) = 0$ , 所以  $f(t_1) > 0, f(t_2) < 0$ , ..... 10分

又因为  $f(e^{-a}) = -\frac{2a}{e^a + 1} < 0, f(e^a) = \frac{2a}{e^a + 1} > 0$ , ..... 11分

且  $f(x)$  图象连续不断, 所以存在唯一  $x_1 \in (e^{-a}, t_1)$ , 使得  $f(x_1) = 0$ ,  
存在唯一  $x_2 \in (t_2, e^a)$ , 使得  $f(x_2) = 0$ , 又因为  $F(x) = \frac{1}{x-1}f(x)$ ,

所以, 当  $F(x)$  有两个不同的零点时,  $a > 2$ . .... 12分

22. 解: (I) 依题意得:  $x = 2\cos\varphi, y = \sin\varphi$ ,

$x + 2y = 2\cos\varphi + 2\sin\varphi = 2\sqrt{2}\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})$ , ..... 2分

当  $\varphi + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$ , 即  $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$  时  $k \in Z, \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) = 1$   
..... 3分

$x + 2y$  的最大值为  $2\sqrt{2}$  ..... 4分

(II)  $x = 2\cos\varphi, y = \sin\varphi$ ,

由于  $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ , 整理得  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

由直线  $l$  的倾斜角为  $\alpha (0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2})$ , 依题意易知:  $F(\sqrt{3}, 0)$ , ..... 5分

可设直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \sqrt{3} + t\cos\alpha \\ y = t\sin\alpha \end{cases} (t \text{ 为参数})$

代入  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  得到:  $(1 + 3\sin^2\alpha)t^2 + 2\sqrt{3}t\cos\alpha - 1 = 0$ ,

易知  $\Delta = 12\cos^2\alpha + 4(1 + 3\sin^2\alpha) = 16 > 0$ , ..... 6分

设点  $D$  和点  $E$  对应的参数为  $t_1$  和  $t_2$ ,

所以  $t_1 + t_2 = \frac{-2\sqrt{3}\cos\alpha}{1+3\sin^2\alpha}$ ,  $t_1 t_2 = -\frac{1}{1+3\sin^2\alpha} < 0$ . ..... 7分

则  $|t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \frac{4}{1+3\sin^2\alpha}$ ,

由参数的几何意义:  $\frac{1}{|EF|} + \frac{1}{|FD|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} = \frac{|t_1 - t_2|}{|t_1 t_2|} = 4$ . ... 8分

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{16} \left( \frac{1}{|EF|} + \frac{1}{|FD|} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ,  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$

$|FM| = \left| \frac{t_1 + t_2}{2} \right| = \left| \frac{-\sqrt{3}\cos\alpha}{1+3\sin^2\alpha} \right| = \frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{1+3\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ , ..... 9分

所以  $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ ,

所以直线  $l$  的斜率为  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , 直线  $l$  的普通方程为  $\sqrt{5}x - 2y - \sqrt{15} = 0$ .

..... 10分

23. 解: (I) 原不等式为  $|x+1| + |x+4| \leq 7$ ,

当  $x \leq -4$  时, 得  $-x-1-x-4 \leq 7$ , 得  $x \geq -6$ ,

所以  $-6 \leq x \leq -4$ . ..... 1分

当  $-4 < x \leq -1$  时, 得  $-x-1+x+4 \leq 7$  成立, 所以  $-4 < x \leq -1$

..... 2分

当  $x > -1$  时,  $x+1+x+4 \leq 7$ ,

所以  $-1 < x \leq 1$ . ..... 3分

综上得不等式的解集为  $\{x | -6 \leq x \leq 1\}$ . ..... 4分

(II) 因为  $m, n$  为正实数, 并且  $\frac{m^2+n}{mn} = \frac{m}{n} + \frac{1}{m} = \frac{m}{n} + \frac{3m+n}{m} = 3 + \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq$

$3 + 2\sqrt{\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m}} = 5$ , ..... 6分

当  $m = n = \frac{1}{4}$  时等号成立,

所以  $\frac{mn}{m^2+n}$  的最大值为  $\frac{1}{5}$ . ..... 8分

又因为  $f(x) \geq |x+4a - (x+a)| = |3a|$ , 当  $x = -a$  时取到等号, .....

..... 9分

要使  $f(x) \geq \frac{mn}{m^2+n}$  恒成立, 只需  $|3a| \geq \frac{1}{5}$ .

所以  $a \leq -\frac{1}{15}$  或  $a \geq \frac{1}{15}$  ..... 10分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（<http://www.zizzs.com/>）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》