2023年高考适应性训练（二）

一、单项选择题

1. C　2. A　3. D　4. D　5. B　6. B　7. B　8. C

二、多项选择题

9. ACD　10. ACD　11. BD　12. BC

三、填空题

13. 32　14. $\sqrt{3}$　15. 5050　16. $\frac{\sqrt{3}\pi}{16}$；$\frac{\sqrt{78}+3\sqrt{6}}{6}\pi$

四、解答题

17. 解：（1）$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{a^2-3b^2}{4}\sin C$，则 $2ab=a^2-3b^2$

即 $a^2-2ab-3b^2=0$，即 $(a+b)(a-3b)=0$

故 $a=3b$，由正弦定理得 $\sin A=3\sin B$ ………………… 5′

（2）由 $DC=DA=\frac{1}{3}BC=\frac{1}{3}a$，由（1）可知 $a=3b$　　（2）解答有误，

则 $DC=DA=b=AC$，可得 ΔADC 为等边三角形，

则 $\angle ADC=60°$，从而 $\angle ADB=120°$

在 ΔADB 中，由余弦定理可得 $-\frac{1}{2}=\frac{b^2+(\frac{2}{3}a)^2-c^2}{2b\cdot\frac{2}{3}a}$

$c^2=7b^2$

又 $a=3b$，所以 $c=3b$，故 ~~ΔABC 为等腰三角形~~　　$\therefore \cos A=\frac{b^2+7b^2-9b^2}{2b\cdot\sqrt{7}b}$

~~所以 $\cos A=\frac{\frac{b}{2}}{3b}=\frac{1}{6}$~~ $-\frac{\sqrt{7}}{14}$ ………………… 10′　　$=-\frac{\sqrt{7}}{14}$

18. 解：（1）$\because a_1=1$，$\{\sqrt{S_n}\}$ 是公差为1的等差数列，

$\therefore \sqrt{S_n}=n$，即 $S_n=n^2$　　1′

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1$，　　2′

又 $a_1=1$，则 $a_n=2n-1$ ………………… 3′

$\{b_n\}$ 是正项等比数列，设公比为 q，则 $q>0$

$\therefore b_{a_3}=b_5=16=b_1q^4$，而 $b_1=1$，故 $q=2$，　　5′

$\therefore b_n=2^{n-1}$，即 $b_{a_n}=2^{2n-2}=4^{n-1}$ ………………… 6′

（2）$\because a_n\sqrt{b_{a_n}}=(2n-1)\cdot 2^{n-1}$

$\therefore T_n=1\times 2^0+3\times 2^1+\cdots+(2n-1)\times 2^{n-1}$　　1′

$\therefore 2T_n = 1\times 2^1 + 3\times 2^2 + \cdots + (2n-1)\times 2^n$ 2'

$\therefore -T_n = 1\times 2^0 + 2\times 2^1 + \cdots + 2\times 2^{n-1} - (2n-1)\times 2^n$

$= 1 + 2\times\dfrac{2(1-2^{n-1})}{1-2} - (2n-1)\times 2^n$

$= (3-2n)\times 2^n - 3$ 5'

$\therefore T_n = (2n-3)\times 2^n + 3$ .... 12' 6'

19. 解：（1）记等腰梯形 $ABCD$ 的高为 BH

在等腰梯形 $ABCD$ 中，

$\because AB // CD, \angle ABC = 120^\circ$

$\therefore \angle BCD = 60^\circ$

$\because BC = 2$， $\therefore BH = \sqrt{3}, HC = 1$

$\therefore CD = 4$， $\because M$ 为 CD 中点，

$\therefore MC = 2$， $\therefore \Delta MBC$ 为等边三角形，则 $MB = MC$

在 ΔPMC 和 ΔPMB 中，

$\begin{cases} PM = PM \\ PB = PC \\ MB = MC \end{cases}$ 则 ΔPMC 与 ΔPMB 全等

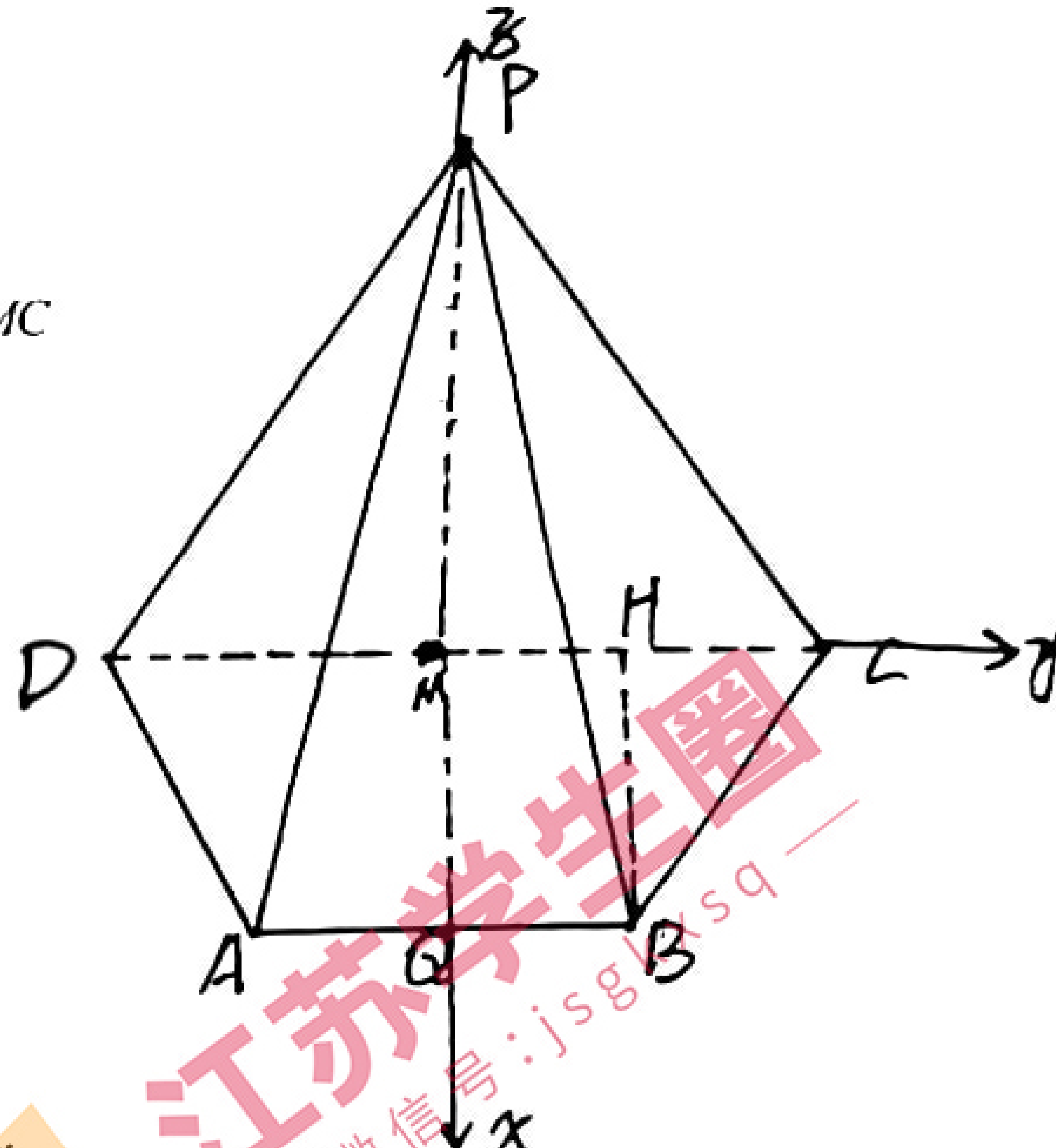
$\therefore \angle PMB = \angle PMC$

又 $PM \perp CD$

$\therefore PM \perp MB$

而 $CD \cap MB = M, CD, MB \subset$ 面 $ABCD$

$\therefore PM \perp$ 面 $ABCD$ .... 6'



答19图

（2）在面 $ABCD$ 内，过 M 作 $MN \perp CD$，与 AB 交于点 Q

以 M 为坐标原点建系如图，则 $D(0,-2,0)$， $P(0,0,3)$， $B(\sqrt{3},1,0)$， $C(0,2,0)$，

从而， $N(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1,1)$， $\overrightarrow{DN} = (\dfrac{\sqrt{3}}{3},3,1)$，

$\overrightarrow{MB} = (\sqrt{3},1,0)$， $\overrightarrow{MP} = (0,0,3)$ .... 8'

设平面 PMB 的一个法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$

则 $\begin{cases} \sqrt{3}x + y = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$， $\vec{n} = (1,-\sqrt{3},0)$ .... 10'

$$\cos\langle \vec{n}, \overrightarrow{DN} \rangle = \frac{-\dfrac{8}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{\dfrac{31}{3}}} = -\frac{4\sqrt{31}}{31}$$

所以直线 DN 与平面 PMB 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{31}}{31}$ ……………………… 12′

20. 解：（1）当 $x=1000$ 时，$X\sim B(4,0.9)$

X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	0.0001	0.0036	0.0486	0.2916	0.6561

……………………… 3′

$E(X)=4\times 0.9=3.6$

答：数学期望为 3.6 ……………………… 5′

（2）当 $900<x\le 1000$ 时，记参加的人数为 X_1，$X_1\sim B(M,0.9)$

$E(X_1)=0.9M$，则 $E(Y)=(x-80)E(X_1)=M(0.9x-720)\le 180M$

当 $100<x\le 1100$ 时，记参加的人数为 X_2，$X_2\sim B(M,0.7)$

$E(X_2)=0.7M$，则 $E(Y)=(x-80)E(X_2)=M(0.7x-560)\le 210M$

当 $1100<x\le 1200$ 时，记参加的人数为 X_3，$X_3\sim B(M,0.2)$

$E(X_3)=0.2M$，则 $E(Y)=(x-80)E(X_3)=M(0.2x-160)\le 80M$

$\therefore$ 当 $x=1100$ 时，$E(Y)$ 达到最大值 ……………………… 12′

21 解：（1）设 $M(x,y)$，则 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x+1|$，解得 $y^2=4x$ ……………………… 3′

(1) 法二：
设 $C: y^2=2px$
$\because F(1,0)$
$\therefore \frac{p}{2}=1$ $\therefore p=2$
$\therefore y^2=4x$

（2）设直线 BD 的方程为 $x=ty+m(t\ne 0)$ 代入 $y^2=4x$ 得

$y^2-4ty-4m=0$，设 $B(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，则

$$\begin{cases}\Delta=16(t^2+m)>0\\ y_1+y_2=4t\\ y_1\cdot y_2=-4m\end{cases}$$

……………………… 5′

又直线 OB 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1}x$，即 $y=\frac{4}{y_1}x$，则 $y_S=\frac{4m}{y_1}$

同理：$y_T=\frac{4m}{y_2}$ ……………………… 7′

则 $PT\times PS=|y_S\cdot y_T|=\frac{16m^2}{y_1\cdot y_2}=-4m$

$\because O,F,S,T$ 四点共圆，

$\therefore PT\times PS=PO\times PF$ ……………………… 10′

即 $-4m=m(m-1)$，又 $m<0$，则 $m=-3$ ……………………… 12′

22 解：（1） $f'(x)=a\ln(ax-1)$

当 $a>0$ 时，定义域为 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，令 $f'(x)>0$，则 $x>\frac{2}{a}$；

当 $a<0$ 时，定义域为 $\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)$，令 $f'(x)>0$，则 $\frac{2}{a}<x<\frac{1}{a}$；

当 $a=0$，$f(x)$ 无意义

综上：当 $a>0$ 时，增区间为 $\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$；

当 $a<0$ 时，增区间为 $\left(\frac{2}{a},\frac{1}{a}\right)$. ……………………… 4′

（2）由题意 $ax-1>0$ 在 $\left[\frac{1}{3},1\right]$ 恒成立，则 $a>3$ ……………………… 5′

且 $g'(x)=f'(x)-e^x=a\ln(ax-1)-e^x\le 0$ 在 $\left[\frac{1}{3},1\right]$ 恒成立， ……………………… 6′

令 $h(x)=g'(x)$，

则 $h'(x)=\frac{a^2}{ax-1}-e^x$，令 $h'(x)=m(x)$，则 $m'(x)=-\frac{a^3}{ax-1}-e^x<0$ 恒成立

故 $m(x)$ 在 $\left[\frac{1}{3},1\right]$ 上单调递减，即 $m(x)\ge m(1)=\frac{a^2}{a-1}-e$ ……………………… 8′

当 $a>3$ 时，$\frac{a^2}{a-1}>\frac{9}{2}$，故 $m(x)\ge m(1)=\frac{a^2}{a-1}-e>0$，即 $h'(x)>0$

从而 $h(x)$ 在 $\left[\frac{1}{3},1\right]$ 上单调递增，则 $h(x)_{\max}=h(1)=a\ln(a-1)-e\le 0$

所以 $a\le e+1$ ……………………… 12′