

洛阳市 2022——2023 学年高一质量检测

数学试卷参考答案

一、选择题

1 - 5 BDACA 6 - 8 ADC 9. AB 10. AC 11. ABD 12. BCD

二、填空题

13. 5 14. $\frac{1}{5}$ 15. 4 16. $\frac{32\sqrt{2}}{3}$

17. (1) $(2+i)z = (2+i)(1+bi) = (2-b) + (2b+1)i$,2 分

$\therefore (2+i)z$ 是纯虚数, $\therefore \begin{cases} 2-b=0, \\ 2b+1 \neq 0. \end{cases} \therefore b=2$5 分

(2) 复数 $z_1 = \frac{a+i}{1+2i} = \frac{(a+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{a+2}{5} + \frac{1-2a}{5}i$,7 分

$\therefore$ 复数 z_1 所对应的点在第二象限,

$\therefore \begin{cases} \frac{a+2}{5} < 0, \\ \frac{1-2a}{5} > 0. \end{cases}$ 解得: $a < -2$9 分

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -2)$10 分

18. 解: (1) 由数量积的定义可知 $|\mathbf{n}| \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}|} = 1$,2 分

$\therefore$ 向量 $\mathbf{n}$ 在向量 $\mathbf{m}$ 方向上的投影向量为 $|\mathbf{n}| \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|} = \frac{1}{2}\mathbf{m}$,5 分

(2) $|\mathbf{p}| = |\mathbf{m} + t\mathbf{n}| = \sqrt{|\mathbf{m}|^2 + 2\mathbf{m} \cdot t\mathbf{n} + |\mathbf{n}|^2 t^2}$,7 分

又 $|\mathbf{m}| = 2, \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\pi}{3}$,

$\therefore |\mathbf{p}| = \sqrt{|\mathbf{n}|^2 t^2 + 2|\mathbf{n}|t + 4} = \sqrt{(|\mathbf{n}|t + 1)^2 + 3}$,10 分

$\therefore$ 当 $|\mathbf{n}|t = -1$ 时, $|\mathbf{p}|$ 取到最小值为 $\sqrt{3}$12 分

19. 解: (1) 由正弦定理可得: $(\sin B + \sin C) \cos A = \sin A (\cos B + \cos C)$,1 分

即 $\sin B \cos A - \cos B \sin A = \sin A \cos C - \cos A \sin C$,

故 $\sin(B-A) = \sin(A-C)$,3 分

又 $B-A \in (-\pi, \pi), A-C \in (-\pi, \pi)$,

故有 $B-A = A-C$, 或 $(B-A) + (A-C) = \pi$ (舍去), 或 $(B-A) + (A-C) = -\pi$ (舍去),

则 $B+C = 2A$,5 分

$$(2) \because A_1B = AA_1, AN = BN$$

$$\therefore \triangle AA_1N \cong \triangle A_1NB,$$

$$\therefore \angle A_1NA = \angle A_1NB = 90^\circ,$$

$$\therefore AN \perp A_1N.$$

……8 分

$$\therefore A_1N \cap BC = N,$$

$$\therefore AN \perp \text{平面 } A_1BC. \therefore A_1N \text{ 为 } AA_1 \text{ 在平面 } A_1BC \text{ 内的射影.}$$

……9 分

$$\therefore \angle AA_1N \text{ 为 } AA_1 \text{ 与平面 } A_1BC \text{ 所成的角.}$$

……10 分

$$\text{在直角 } \triangle A_1AN \text{ 中, } AN = \sqrt{2}, AA_1 = 4,$$

$$\therefore \sin \angle AA_1N = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{即 } AA_1 \text{ 与平面 } A_1BC \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

……12 分

$$22. (1) \text{ 解: } g(x) = \sin^2 x - \cos x + a = -\cos^2 x - \cos x + a + 1, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

……1 分

$$\text{由 } g(x) = 0 \text{ 可得 } a + 1 = \cos^2 x + \cos x,$$

$$\text{令 } t = \cos x, \text{ 由 } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ 可得 } -1 < t < 0,$$

$$\text{故 } \cos^2 x + \cos x = t + t^2 \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right).$$

……2 分

$$\text{当 } a + 1 \geq 0 \text{ 或 } a + 1 < -\frac{1}{4}, \text{ 即 } a \geq -1 \text{ 或 } a < -\frac{5}{4} \text{ 时, } a + 1 = t + t^2 \text{ 无解,}$$

$$\text{所以 } g(x) \text{ 不存在零点;}$$

……3 分

$$\text{当 } a + 1 = -\frac{1}{4}, \text{ 即 } a = -\frac{5}{4} \text{ 时, } a + 1 = t + t^2 \text{ 有一解 } t = -\frac{1}{2}, \text{ 此时 } x \text{ 仅有一解 } \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{所以 } g(x) \text{ 只存在一个零点;}$$

……4 分

$$\text{当 } -\frac{1}{4} < a + 1 < 0, \text{ 即 } -\frac{5}{4} < a < -1 \text{ 时, } a + 1 = t + t^2 \text{ 有两解}$$

$$t = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{a + \frac{5}{4}}, \text{ 此时 } \cos x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{a + \frac{5}{4}} \text{ 各有一解, 故 } g(x) \text{ 有两个零点.}$$

……5 分

$$\text{综上, 实数 } a \text{ 的取值范围为 } \left(-\frac{5}{4}, -1\right).$$

……6 分

$$(2) \text{ 证明: 函数 } g(x) \text{ 有两个零点 } x_1, x_2,$$

$$\text{令 } t_1 = \cos x_1 < 0, t_2 = \cos x_2 < 0,$$

$$\text{则 } t_1, t_2 \text{ 为方程 } a + 1 = t + t^2 \text{ 的两根,}$$

$$\text{则 } t_1 + t_2 = -1, t_1 t_2 = -(a + 1),$$

……7 分

所以 $\cos x_1 + \cos x_2 = -1$,

两边平方得 $\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + 2\cos x_1 \cos x_2 = 1$,

因为 $2\cos x_1 \cos x_2 > 0$,

所以 $\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 < 1 = \cos^2 x_2 + \sin^2 x_2$,8 分

所以 $\cos^2 x_1 < \sin^2 x_2 = \cos^2(\frac{3\pi}{2} - x_2)$,

由 $\frac{\pi}{2} < x_2 < \pi$ 可得 $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} - x_2 < \pi$,

所以 $\cos(\frac{3\pi}{2} - x_2) < 0$,

则 $\cos x_1 > \cos(\frac{3\pi}{2} - x_2)$,10 分

因为 $y = \cos x$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减,

所以 $x_1 < \frac{3\pi}{2} - x_2$,11 分

即 $x_1 + x_2 < \frac{3\pi}{2}$12 分