2021年秋季高三数学（理）开学摸底考试卷01

班级____________ 姓名____________ 分数____________

（考试时间：120分钟 试卷满分：150分）

一．选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．若集合 $A=\left\{x \mid \frac{x+2}{x-1} \quad 0\right\}$，$B=\{x \mid x^2-x-2<0\}$，则 $A \bigcap B=$

A．$[-2，2)$ B．$(-1，1]$ C．$(-1,1)$ D．$(-1,2)$

【答案】C

【解析】$\because$ 集合 $A=\left\{x \mid \frac{x+2}{x-1} \quad 0\right\}=\{x \mid -2 \quad x<1\}$，

$B=\{x \mid x^2-x-2<0\}=\{x \mid -1<x<2\}$，

$\therefore A \bigcap B=\{x \mid -1<x<1\}=(-1,1)$．

故选C．

2．若虚数 z 满足 $z(1+i)=|z|^2$，则 $z=$

A．$1-i$ B．$1+i$ C．$-1-i$ D．$-1+i$

【答案】A

【解析】设 $z=a+bi$，a，$b \in R$，

则由 $z(1+i)=|z|^2$，得 $(a+bi)(1+i)=|a+bi|^2=a^2+b^2$，

即 $a-b+(a+b)i=a^2+b^2$，

所以 $\begin{cases} a-b=a^2+b^2 \\ a+b=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$，

所以 $z=1-i$．

故选A．

3．已知命题 $p: \forall k \in(1,2)$，方程 $\frac{x^2}{2-k}-\frac{y^2}{k-1}=1$ 都表示双曲线；q：抛物线 $y=4x^2$ 的焦点坐标为 $(1,0)$；

下列判断正确的是

A．p 是假命题 B．q 是真命题

C． $p\wedge(\neg q)$ 是真命题　　　　　　　　D． $(\neg p)\wedge q$ 是真命题

【答案】C

【解析】方程 $\dfrac{x^2}{2-k}-\dfrac{y^2}{k-1}=1$ 表示双曲线，则有 $(2-k)(k-1)>0$，解得 $1<k<2$，

故命题 $P:\forall k\in(1,2)$，方程 $\dfrac{x^2}{2-k}-\dfrac{y^2}{k-1}=1$ 都表示双曲线为真命题；

抛物线 $y=4x^2$ 的焦点坐标为 $(0,\dfrac{1}{16})$，

故命题 q：抛物线 $y=4x^2$ 的焦点坐标为 $(1,0)$ 是假命题；

所以 $\neg q$ 为真， $\neg p$ 为假，

则 $p\wedge(\neg q)$ 为真， $(\neg p)\wedge q$ 为假，

故选 C．

4．下列函数为奇函数的是

A． $f(x)=x^3+3x^2$　　　　　　　　B． $f(x)=2^x+2^{-x}$

C． $f(x)=x\sin x$　　　　　　　　D． $f(x)=ln\dfrac{3+x}{3-x}$

【答案】D

【解析】对于 A，$\because f(-1)=2$， f （1） $=4$， $f(-1)\neq-f$ （1），

$\therefore$ 函数不是奇函数；

对于 B，函数定义域为 R， $f(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^x+2^{-x}=f(x)$，

$\therefore$ 函数为偶函数；

对于 C，函数定义域为 R， $f(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x=f(x)$，

$\therefore$ 函数为偶函数；

对于 D，由 $\dfrac{3+x}{3-x}>0$，得 $-3<x<3$，函数定义域为 $(-3,3)$，

而 $f(-x)=ln\dfrac{3-x}{3+x}=ln(\dfrac{3+x}{3-x})^{-1}=-ln\dfrac{3+x}{3-x}=-f(x)$，

$\therefore$ 函数为奇函数．

故选 D．

5．已知 $a=2^{\sqrt{3}}$， $b=\sqrt{3}$， $c=\log_2 3$，则 a， b， c 的大小关系为(　　)

A． $b>a>c$　　　B． $a>c>b$　　　C． $a>b>c$　　　D． $b>c>a$

【答案】C

【解析】根据指数运算与对数运算的性质，

$a=2^{\sqrt{3}}>3$， $1<b=\sqrt{3}<2$， $1<c=\log_2 3<2$，

设 $b=\sqrt{3}=\log_2 2^{\sqrt{3}}$， $c=\log_2 3$，

由于函数 $m=\log_2 t$ 为增函数，

由于 $y=2^{\sqrt{3}}$ 的值接近于 4，

所以 $a>b>c$.

故选：C.

6．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，异面直线 AB_1 与 BD 的夹角为

A．$\frac{\pi}{2}$　　　　B．$\frac{\pi}{3}$　　　　C．$\frac{\pi}{4}$　　　　D．$\frac{\pi}{6}$

【答案】B

【解析】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $DD_1//BB_1$， 且 $DD_1=BB_1$，

所以四边形 BB_1D_1D 为平行四边形，所以 $BD//B_1D_1$，

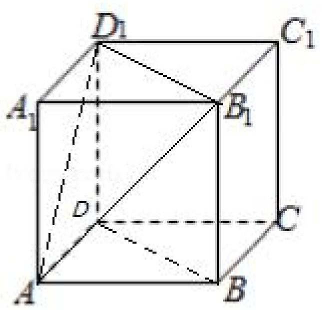
所以异面直线 AB_1 与 BD 夹角等于 $\angle AB_1D_1$ 或其补角，

连接 AD_1， 因为△ AB_1D_1 为正三角形，

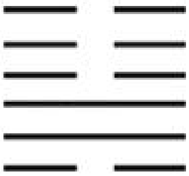
所以 $\angle AB_1D_1=\frac{\pi}{3}$，

所以异面直线 AB_1 与 BD 夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

故选 B.



7．我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化．每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成，爻分为阳爻“——”和阴爻“— —”，如图就是一重卦．如果某重卦中有 3 个阳爻，3 个阴爻，则它可以组成　　种重卦．



A．6　　B．15　　C．20　　D．1

【答案】C

【解析】每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成，某重卦中有 3 个阳爻，3 个阴爻，则有 $C_6^3=20$ 种．故选 C．

8．将函数 $f(x)=\sin(3x+\dfrac{\pi}{6})$ 的图象上各点的横坐标伸长到原来的 6 倍（纵坐标不变），再将所得到的图象向右平移 $m(m>0)$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象．若 $g(x)$ 为奇函数，则 m 的最小值为

A．$\dfrac{\pi}{18}$　　B．$\dfrac{\pi}{9}$　　C．$\dfrac{\pi}{6}$　　D．$\dfrac{\pi}{3}$

【答案】D

【解析】将函数 $f(x)=\sin(3x+\dfrac{\pi}{6})$ 的图象上各点的横坐标伸长到原来的 6 倍（纵坐标不变），得到 $y=\sin(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{6})$，

再将所得到的图象向右平移 $m(m>0)$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象由，

即 $g(x)=\sin[\dfrac{1}{2}(x-m)+\dfrac{\pi}{6}]=\sin(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{m}{2})$，

因为 $g(x)$ 是奇函数，所以 $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{m}{2}=k\pi$，$k\in Z$．

解得 $m=\dfrac{\pi}{3}-2k\pi$．

因为 $m>0$，所以当 $k=0$ 时，m 的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$．

故选 D．

9．在圆 $x^2+y^2=4$ 内任取一点，则该点到直线 $x+y-2\sqrt{2}=0$ 的距离小于 1 的概率为

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4\pi}$　　C．$\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4\pi}$　　D．$\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4\pi}$

【答案】C

【解析】由点到直线的距离公式得原点 O 到直线 $x+y-2\sqrt{2}=0$ 的距离为 $\dfrac{|2\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=2$，

故到直线 $x+y-2\sqrt{2}=0$ 距离为 1 的点在直线 $x+y+c=0$ 上，

则 $\frac{|c+2\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=1$， $c=-\sqrt{2}$ 或 $c=-3\sqrt{2}$ （舍去）;

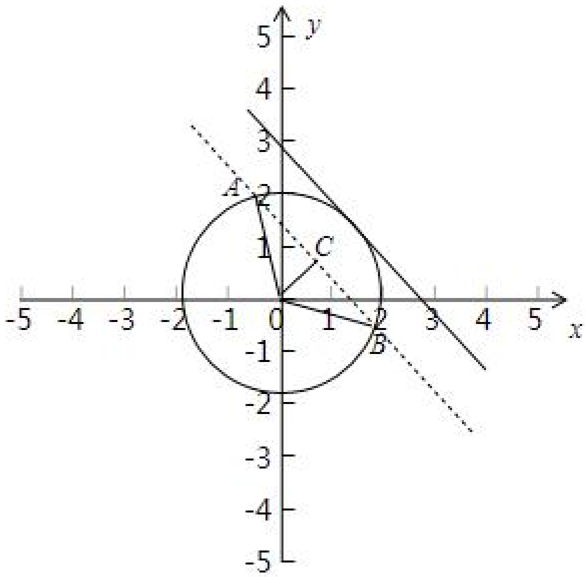
满足圆 $x^2+y^2=4$ 内到直线 $x+y-\sqrt{2}=0$ 的距离小于 1 的点位于两直线之间的弓形内，

由于圆的半径为 2， $\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$， $AB=2\sqrt{3}$；

$S_{弓形}=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times 2^2-\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 1=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$.

故概率 $P=\frac{S_{弓形}}{S_{圆}}=\frac{\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}}{4\pi}=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$.

故选 C.



10．已知函数 $f(x)=xlnx-\frac{1}{2}(m+1)x^2-x$ 有两个极值点，则实数 m 的取值范围为

A． $(-\frac{1}{e}，\ 0)$　　B． $(-1,\frac{1}{e}-1)$　　C． $(-\infty,\frac{1}{e}-1)$　　D． $(-1,+\infty)$

【答案】B

【解析】由 $f(x)=xlnx-\frac{1}{2}(m+1)x^2-x$，

得 $f'(x)=lnx-(m+1)x$， $x>0$.

要使 $f(x)=xlnx-\frac{1}{2}(m+1)x^2-x$ 有两个极值点，

只需 $f'(x)=lnx-(m+1)x=0$ 有两个变号根，即 $m+1=\frac{lnx}{x}$ 有两个变号根.

令 $g(x)=\frac{lnx}{x}$， $(x>0)$， 则 $g'(x)=\frac{1-lnx}{x^2}$，

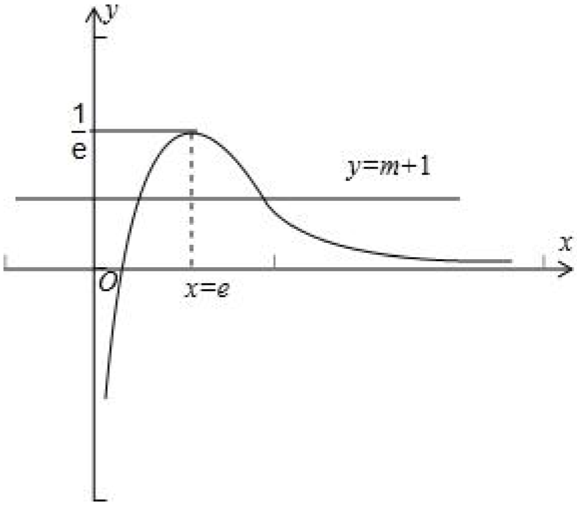
由 $g'(x)=0$ 得 $x=e$， 易知当 $x\in(0,e)$ 时， $g'(x)>0$， 此时 $g(x)$ 单调递增;

当 $x\in(e,+\infty)$ 时， $g'(x)<0$ ，此时 $g(x)$ 单调递减．

所以 $g(x)_{max}=g(e)=\frac{1}{e}$ ，

而 $g(\frac{1}{e})=-e<0$ ， $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$ ，

作出 $y=g(x)$ ， $y=m+1$ 的图象，可知：



$0<m+1<\frac{1}{e}$ ，解得 $-1<m<-1+\frac{1}{e}$ ．

故选 B．

11．已知 O 为椭圆 C 的中心， F 为 C 的一个焦点，点 M 在 C 外， $\overrightarrow{MO}=3\overrightarrow{OF}$ ，经过 M 的直线 l 与 C 的一个交点为 N ， ΔMNF 是有一个内角为 $120°$ 的等腰三角形，则 C 的离心率为

A． $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B． $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C． $\sqrt{3}-1$ D． $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

【答案】B

【解析】不妨设 $F(c,0)$ ， $\overrightarrow{MO}=3\overrightarrow{OF}$ ，则 $M(-3c,0)$ ，

易知 ΔMNF 中只能 $\angle MNF=120°$ ，

ΔMNF 是有一个内角为 $120°$ 的等腰三角形，则 $N(-c,\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}c)$ ，

将 N 代入椭圆方程得到 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{\frac{4}{3}c^2}{b^2}=1$ ，即 $e^2+\frac{4e^2}{3(1-e^2)}=1$ ，

解得 $e^2=\frac{1}{3}$ 或 $e^2=3$ （舍去），

故 $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

故选 B．

12．已知函数 $f(x)=e^{|x|}-\frac{1}{2}$， $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+1, x \quad 0 \\ (x-1)lnx, x>0\end{cases}$ ．若关于 x 的方程 $g(f(x))-m=0$ 有四个不同的解，则实数 m 的取值集合为（　　）

A．$(0,\frac{ln2}{2})$　　　B．$(\frac{ln2}{2},1)$　　　C．$\left\{\frac{ln2}{2}\right\}$　　　D．$(0,1)$

【答案】A

【解析】解：设 $t=f(x)$，方程 $g(f(x))-m=0$ 有四个不同的解，

$\because f(-x)=e^{|-x|}-\frac{1}{2}=e^{|x|}-\frac{1}{2}=f(x)$，

$\therefore t=f(x)$ 为偶函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=e^{x}-\frac{1}{2}$ 为增函数，则当 $x \quad 0$ 时，$t=f(x)$ 为减函数，

$\therefore t_{min}=f(0)=e^{0}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，即 $t \quad \frac{1}{2}$，

当 $x>0$ 时，$g(x)=(x-1)lnx$，则 $g'(x)=lnx+\frac{1}{x}(x-1)=lnx-\frac{1}{x}+1$，

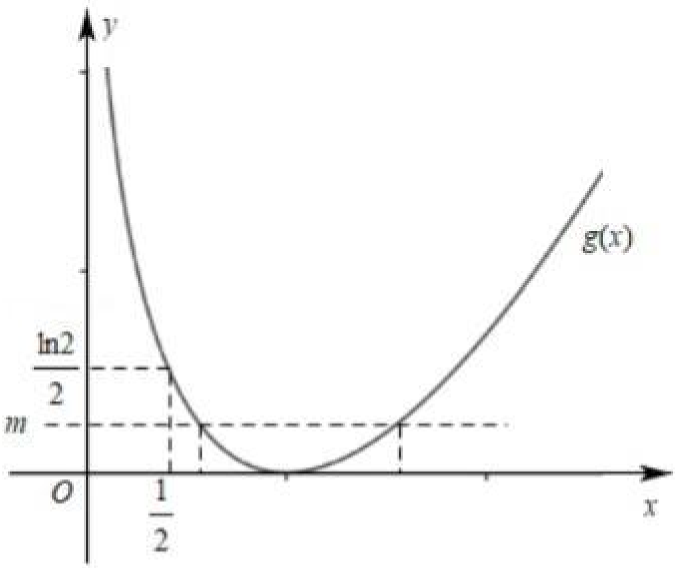
另 $g'(x)=0$，解得 $x=1$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 为增函数，

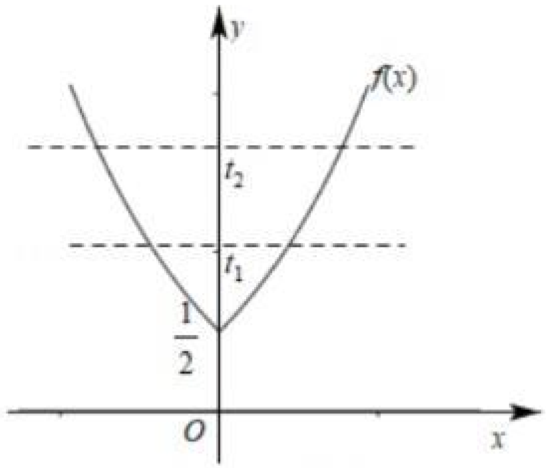
又 $g(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}ln\frac{1}{2}=\frac{ln2}{2}$，

作出 $g(x)$ 在 $x>0$ 时的图像，如图所示：



由图可知，当 $m\in(0,\frac{ln2}{2})$ 时，$y=g(t)$，$t \quad \frac{1}{2}$ 的图像与 $y=m$ 图像有 2 个交点，

作出 $t=f(x)$ 的图像，如下：



此时 $y=t_1$ 与 $y=t_2$ 分别与 $y=f(x)$ 有 2 个交，即 $g(f(x))-m=0$ 有 4 个不同的解，

故实数 m 的取值范围为 $(0,\frac{ln2}{2})$，

故选 A.

二.填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 的直线 l 交 C 的右支于 A，B 两点，且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF_1}=0$，$12|\overrightarrow{AB}|=5|\overrightarrow{AF_1}|$，则 C 的离心率为____.

【答案】$\frac{\sqrt{37}}{5}$

【解析】可设 $|AF_1|=12t$，$t>0$，

由 $12|\overrightarrow{AB}|=5|\overrightarrow{AF_1}|$，可得 $|AB|=5t$，

由双曲线的定义可得 $|AF_2|=|AF_1|-2a=12t-2a$，

$|BF_2|=|AB|-|AF_2|=5t-(12t-2a)=2a-7t$，

由双曲线的定义可得 $|BF_1|=|BF_2|+2a=4a-7t$，

在直角 ΔABF_1 中，可得 $|BF_1|=\sqrt{|AB|^2+|AF_1|^2}=13t=4a-7t$，

即 $t=\frac{1}{5}a$，

在直角△ AF_1F_2 中，可得 $|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2$，

即为 $(\frac{12}{5}a)^2+(\frac{2}{5}a)^2=4c^2$，即 $c=\frac{\sqrt{37}}{5}a$，

可得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{37}}{5}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{37}}{5}$.

14．已知向量 $\vec{a}=(2,3)$，$\vec{b}=(-1,m)$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}$ 垂直，则 $m=$____.

【答案】$-\frac{11}{3}$

【解析】$\because$ 向量 $\vec{a}=(2,3)$，$\vec{b}=(-1,m)$，

$\therefore\ \vec{a}+\vec{b}=(1,3+m)$，

$\because\ \vec{a}$与$\vec{a}+\vec{b}$ 垂直，$\therefore 2+3(3+m)=0$，解得 $m=-\frac{11}{3}$.

故答案为：$-\frac{11}{3}$.

15．在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $B=\frac{\pi}{3}$，$a=2$，$b=\sqrt{3}$，则 ΔABC 的面积为____.

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】由余弦定理可得，$\frac{1}{2}=\frac{4+c^2-3}{4c}$，

解可得，$c=1$，

所以 ΔABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 2\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{2}$

16．将满足 $\begin{cases}2x+y-3 \quad 0\\ x \quad 0\\ y \quad -1\end{cases}$ 的封闭图形绕 y 轴旋转一周所得的几何体的主视图面积为____.

【答案】8

【解析】将满足 $\begin{cases}2x+y-3 \quad 0\\ x \quad 0\\ y \quad -1\end{cases}$ 的封闭图形绕 y 轴旋转一周所得的几何体

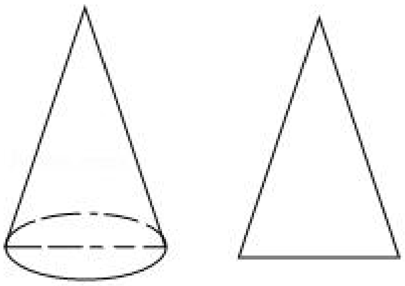
是圆锥，

圆锥的底面半径为：2，高为 4，

几何体的主视图图是等腰三角形，

面积为：$\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$．

故答案为：8．



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。（一）必考题：共 60 分.

17．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots\frac{a_{n-1}}{n-1}+\frac{a_n}{n}=n(n\ \ 2)$，$n\in N^*$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若a_1，a_k，S_{k+2}成等比数列，$k\in N^*$，求$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{S_{k^2}}$的值.

【答案】（1）$a_n=n$；（2）$\frac{72}{37}$．

【解析】解：（1）数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots\frac{a_{n-1}}{n-1}+\frac{a_n}{n}=n(n\ \ 2)$，①，

当$n\ \ 2$时，$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots\frac{a_{n-1}}{n-1}=(n-1)$，②，

①－②得：$\frac{a_n}{n}=1$，

所以$a_n=n$（首项符合通项），

故$a_n=n$．

（2）由于$a_n=n$，所以$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，

故$S_{k+2}=\frac{(k+2)(k+3)}{2}$，

由于a_1，a_k，S_{k+2}成等比数列，

所以$k^2=\frac{(k+2)(k+3)}{2}$，

解得$k=6$或-1（负值舍去），

$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，

所以 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{k^2}}=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{S_{36}}=2\times(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{36}-\frac{1}{37})=2\times(1-\frac{1}{37})=\frac{72}{37}$.

18．某工厂的工人生产内径为 $25.40mm$ 的一种零件，为了了解零件的生产质量，从该厂的 1000 件零件中抽出 50 件，测得其内径尺寸如下（单位：mm）：

25.41×8 25.42×6 25.40×4 25.38×11

25.39×8 25.44×1 25.43×7 25.37×5

这里用．$x\times n$ 表示有 n 件尺寸为 xmm 的零件．

（1）求这 50 件零件内径尺寸的平均数 $\overline{x}$；

（2）设这 50 件零件内径尺寸的方差为 s^2，试估计该厂 1000 件零件中其内径尺寸在 $(\overline{x}-s$，$\overline{x}+s)$ 内的件数．

参考数据：取 $\sqrt{4.16}=2.04$．

【答案】（1）25.40；（2）740.

【解析】（1）计算这 50 个零件内径尺寸的平均数为：

$\overline{x}=\frac{1}{50}\times(25.41\times8+25.42\times6+25.40\times4+25.38\times11+25.39\times8+25.44\times1+2543\times7+25.37\times5)=25.40$；

（2）计算这 50 件零件内径尺寸的方差为：

$s^2=\frac{1}{50}\times[0.01^2\times8+0.02^2\times6+0^2\times4+(-0.02)^2\times11+(-0.01)^2\times8+0.04^2\times1+0.03^2\times7+(-0.03)^2\times5]$

$=\frac{1}{10000}\times4.16$，

所以 $s=\frac{1}{100}\times2.04=0.0204$，

所以 $(\overline{x}-s$，$\overline{x}+s)=(25.3796$，$25.4204)$，

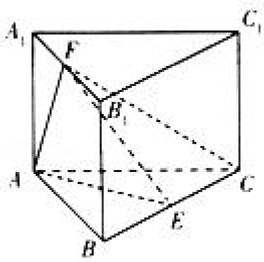
计算这 50 个零件内径尺寸在 $(\overline{x}-s$，$\overline{x}+s)$ 内的件数是 $8+6+4+11+8=37$，

估计该厂 1000 件零件中其内径尺寸在 $(\overline{x}-s$，$\overline{x}+s)$ 内的件数为 $1000\times\frac{37}{50}=740$．

19．如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=2AA_1=4$，E，F 分别是 BC，A_1B_1 的中点．

（Ⅰ）求证：$EF//$ 平面 ACC_1A_1；

（Ⅱ）求二面角 $A-EF-C$ 的余弦值．



【答案】（Ⅰ）证明见解答；（Ⅱ）$\dfrac{\sqrt{105}}{35}$．

【解析】（Ⅰ）证明：如图，取 B_1C_1 的中点 G，连接 EG，FG，

因为 E，F 分别是 BC，A_1B_1 的中点，

所以 $EG//CC_1$，$FG//A_1C_1$，

又 $EG\bigcap FG=G$，$CC_1\bigcap A_1C_1=C_1$，

所以平面 $EFG//$ 平面 ACC_1A_1，

又 $EF\subset$ 平面 EFG，

所以 $EF//$ 平面 ACC_1A_1．

（Ⅱ）由题意，以 A 为原点，垂直与 AE 的直线为 x 轴，AE 为 y 轴，AA 为 z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示，

则 $A(0,0,0)$，$E(0,2\sqrt{3},0)$，$F(1,\sqrt{3},2)$，$C(-2,2\sqrt{3},0)$，

所以 $\overrightarrow{AE}=(0,2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{EF}=(1,-\sqrt{3},2)$，$\overrightarrow{CE}=(2,0,0)$，

设平面 AEF 的一个法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=2\sqrt{3}y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}=x_1-\sqrt{3}y_1+2z_1=0\end{cases}$，取 $x_1=2$，则 $\vec{m}=(2,0,-1)$，

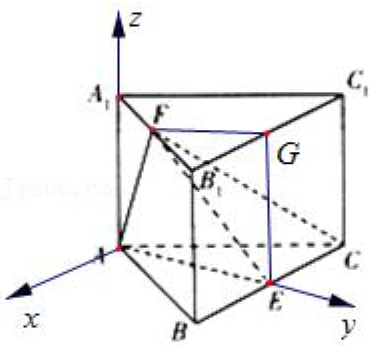
设平面 CEF 的一个法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CE}=2x_2=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}=x_2-\sqrt{3}y_2+2z_2=0\end{cases}$，取 $y_2=2$，则 $\vec{n}=(0,2,\sqrt{3})$，

所以 $\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times\sqrt{7}}=-\dfrac{\sqrt{105}}{35}$，

由图象可得二面角 $A-EF-C$ 的平面角为锐角，

所以二面角 $A-EF-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{105}}{35}$．



20．设 O 为坐标原点，抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 $M(a,4)$ 在 C 上，$|MF|=4$．

（1）求 C 的方程；

（2）过点 F 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，若 l 与圆 $H:(x-1)^2+y^2=\frac{1}{4}$ 相切，求 ΔAOB 的面积．

【答案】（1）$y^2=8x$；（2）16.

【解析】（1）抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F(\frac{p}{2}, 0)$，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，

点 $M(a,4)$ 在 C 上，$|MF|=4$，可得 $a+\frac{p}{2}=4$，$2pa=16$，

解得 $p=4$，则 C 的方程为 $y^2=8x$；

（2）由（1）可得 $F(2,0)$，设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$，

圆 $H:(x-1)^2+y^2=\frac{1}{4}$ 的圆心 $H(1,0)$，半径为 $\frac{1}{2}$，

l 与圆 $H:(x-1)^2+y^2=\frac{1}{4}$ 相切，可得 $\frac{|k-2k|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{1}{2}$，

解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，

则直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$，

联立抛物线方程 $y^2=8x$；可得 $x^2-28x+4=0$，

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则 $x_1+x_2=28$，

可得 $|AB|=x_1+x_2+4=28+4=32$，

又 O 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|\frac{2\sqrt{3}}{3}|}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}=1$，

则 ΔABO 的面积为 $\frac{1}{2}\times 1\times 32=16$．

21．已知函数 $f(x)=alnx+\frac{a-1}{x}-x$，其中 $a\ \ 0$．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的极值；

（2）设 $m\in Z$，当 $a=1$ 时，若不等式 $f(x)<m-(x-2)e^{x}$ 对任意 $x\in(0$，$1]$ 恒成立，求 m 最小值．

【答案】（1）当 $a\ \ 1$ 时，$f(x)$ 的极小值为 f（1）$=a-2$，无极大值，当 $1<a<2$ 时，$f(x)$ 的极小值为 $f(a-1)=aln(a-1)+2-a$，极大值为 f（1）$=a-2$；（2）-3．

【解析】（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$$f'(x)=\frac{a}{x}-1-\frac{a-1}{x^{2}}=-\frac{x^{2}-ax+a-1}{x^{2}}=-\frac{(x-1)[x-(a-1)]}{x^{2}},$$

①当 $a-1\ \ 0$，即 $a\ \ 1$ 时，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，则函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$f(x)$ 有极小值为 f（1）$=a-2$，无极大值；

②当 $0<a-1<1$，即 $1<a<2$ 时，当 $x\in(0,a-1)$，$(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 在 $(0,a-1)$，$(1,+\infty)$ 上单调递减，

当 $x\in(a-1,1)$ 时，$f'(x)>0$，则函数 $f(x)$ 在 $(a-1,1)$ 上单调递增，

则 $f(x)$ 的极小值为 $f(a-1)=aln(a-1)+2-a$，极大值为 f（1）$=a-2$．

综上所述：当 $a\ \ 1$ 时，$f(x)$ 的极小值为 f（1）$=a-2$，无极大值，

当 $1<a<2$ 时，$f(x)$ 的极小值为 $f(a-1)=aln(a-1)+2-a$，极大值为 f（1）$=a-2$；

（2）当 $a=1$ 时，$f(x)=lnx-x$，

由 $f(x)<m-(x-2)e^{x}$，可得 $m>lnx-x+(x-2)e^{x}$，

设 $h(x)=lnx-x+(x-2)e^{x}$，$x\in(0,1)$，则 $h'(x)=(x-1)(e^{x}-\frac{1}{x})$，

当 $0<x\ \ 1$ 时，$x-1\ \ 0$，

设 $u(x)=e^{x}-\frac{1}{x}$，则 $u'(x)=e^{x}+\frac{1}{x^{2}}$，

$\therefore u(x)$ 在 $(0$，$1]$ 上单调递增，

又 u（1）$=e-1>0$，$u(\frac{1}{2})=\sqrt{e}-2<0$，

$\therefore$ 存在 $x_{0}\in(\frac{1}{2}$，$1]$，使得 $u(x_{0})=0$，$e^{x_{0}}=\frac{1}{x_{0}}$，

$\therefore lnx_{0}=-x_{0}$，

当 $x\in(0,x_{0})$ 时，$u(x)<0$，$h'(x)>0$，

当 $x \in (x_0，\ 1]$ 时，$u(x) > 0$，$h'(x)\quad 0$，

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0，\ 1]$ 上单调递减，

得 $h(x)_{max} = (x_0 - 2) \cdot e^{x_0} + lnx_0 - x_0 = (x_0 - 2) \cdot \dfrac{1}{x_0} - 2x_0 = 1 - (\dfrac{2}{x_0} + 2x_0)$，

$\because$ 函数 $y = 1 - (\dfrac{2}{x} + 2x)$ 在区间 $(\dfrac{1}{2}，\ 1)$ 上单调递增，

$\therefore h(x_0) \in (-4，\ -3)$，

又 $m > h(x)$ 对任意的 $x \in (0，\ 1]$ 恒成立，$m \in Z$，

$\therefore m\quad -3$，

故 m 的最小值为是 -3．

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

22．以直角坐标坐标原点 O 为极点，以 x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，并在两种坐标系中取相同的长度单位，已知曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho = 4\cos\theta$，曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = m + t\cos\alpha \\ y = t\sin\alpha \end{cases}$ $(t$ 为参数 $0\quad t < \pi)$，射线 $\theta = \varphi$，$\theta = \varphi + \dfrac{\pi}{4}, \theta = \varphi - \dfrac{\pi}{4}$ 分别与曲线 C_1 交于极点 O 外的三点 A，B，C．

（1）求 $\dfrac{|OB| + |OC|}{|OA|}$ 的值；

（2）当 $\varphi = \dfrac{\pi}{12}$ 时，B，C 两点在曲线 C_2 上，求 m 与 α 的值．

【答案】（1）$\sqrt{2}$；（2）$\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$，$m = 2$．

【解析】（1）设点 A、B、C 的极坐标分别为 $(\rho_1，\ \theta)$，$(\rho_2, \theta + \dfrac{\pi}{4})$，$(\rho_3, \theta - \dfrac{\pi}{4})$，

由点 A、B、C 在曲线 C_1 上得：$\rho_1 = 4\cos\theta$，$\rho_2 = 4\cos(\theta + \dfrac{\pi}{4})$，$\rho_3 = 4\cos(\theta - \dfrac{\pi}{4})$．

所以，$|OB| + |OC| = \rho_2 + \rho_3 = 4\cos(\theta + \dfrac{\pi}{4}) + 4\cos(\theta - \dfrac{\pi}{4}) = 4\sqrt{2}\cos\theta$．

$|OA| = 4\cos\theta$，

所以 $\dfrac{|OB| + |OC|}{|OA|} = \sqrt{2}$．

（2）由曲线 C_2 的参数方程知，曲线 C_2 是倾斜角为 α 且过定点 $(m, 0)$ 的直线，

当 $\theta = \dfrac{\pi}{12}$ 时，B、C 两点的极坐标分别为 $(2, \dfrac{\pi}{3})$，$(2\sqrt{3}，\ -\dfrac{\pi}{6})$，化为直角坐标为 $B(1, \sqrt{3})$，$C(3, -\sqrt{3})$，

所以，直线的斜率为 $\tan\alpha=-\sqrt{3}$，

所以 $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$，又因为直线 BC 的方程为：$y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$，由点 $(m,0)$ 在直线 BC 上得：$m=2$.

23．已知函数 $f(x)=|x-a|+|x+2b|(a>0\text{，}\ b>0)$.

（1）若 $a=1$，$b=1$，求不等式 $f(x)\leqslant 5$ 的解集；

（2）设函数 $f(x)$ 的最小值为 m，当 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$ 时，求 m 的取值范围.

【答案】（1）$[-3\text{，}\ 2]$；（2）$[3+2\sqrt{2},+\infty)$.

【解析】（1）$a=1$，$b=1$，$f(x)=|x-1|+|x+2|\leqslant 5$，

当 $x\leqslant -2$ 时，不等式化为 $-x+1-x-2\leqslant 5$，$\therefore x\geqslant -3$，此时 $-3\leqslant x\leqslant -2$；

当 $-2<x\leqslant 1$ 时，不等式化为 $-x+1+x+2=3\leqslant 5$，恒成立，此时 $-2<x\leqslant 1$；

当 $x>1$ 时，不等式化为 $x-1+x+2=2x+1\leqslant 5$，$\therefore x\leqslant 2$，此时 $1<x\leqslant 2$.

综上所述，不等式的解集为 $[-3\text{，}\ 2]$.

（2）$f(x)=|x-a|+|x+2b|\geqslant|(x-a)-(x+2b)|=|a+2b|=a+2b(a>0\text{，}\ b>0)$，

则 $m=a+2b=(a+2b)\cdot(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})=3+\dfrac{2b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $\dfrac{2b}{a}=\dfrac{a}{b}$，即 $a=\sqrt{2}+1$，$b=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，

所以 m 的取值范围是 $[3+2\sqrt{2},+\infty)$.

扫码关注学科网数学服务号，获取优质数学教育资源

↓ ↓ ↓