绝密★启用前

榆林市2022～2023年度第三次模拟考试

数学试题解析(理科)

1. 【答案】D

【解析】$z=\sqrt{2}\mathrm{i}$，$z^2=-2$，$z^4=4$，故选(D).

2. 【答案】A

【解析】因为$A=\{x|0<x<16\}$，$B=\{y|-1<y<4\}$，所以$A\cup B=(-1,16)$，故选(A).

3. 【答案】B

【解析】$S_3=3a_2=12$，$a_2=4$，而$a_4=0$，故$a_6=-4$，故选(B).

4. 【答案】C

【解析】非零向量$\boldsymbol{a}=(1,x)$，$\boldsymbol{b}=(x^2,4x)$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow|x|=2$，故选(C).

5. 【答案】A

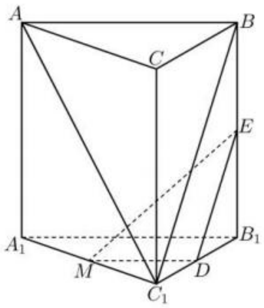
【解析】因为实轴在y轴上，所以$e^2=1+\frac{1}{k^2}=10$，$k=\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，故选(A).

6. 【答案】C

【解析】满足条件的不同选法共有$C_4^1C_6^1C_4^1+C_6^2C_4^1+C_6^1C_4^2=192$，故选(C).

7. 【答案】A

【解析】取B_1C_1、BB_1的中点D、E，则平面$MDE/\!/$平面ABC_1，所以N在线段DE，MN的最大值为$\sqrt{\sqrt{3}^2+\sqrt{5}^2}=2\sqrt{2}$，故选(A).



8. 【答案】B

【解析】执行程序框图，可得下表：

a	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{2}$	2
k	2	4	结束

故选(B).

9. 【答案】D

【解析】令$\varphi(x)=f(x)g(x)-x-1$，则$\varphi'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-1<0$，所以$\varphi(x)$在$(0，+\infty)$上递减，而$\varphi(1)=0$，因为$f(x)g(x)<x+1$，所以$\varphi(x)<\varphi(1)$，解得：$x>1$，故选(D).

10. 【答案】B

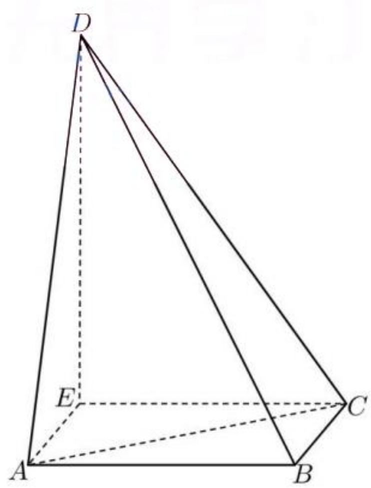
【解析】因为第16匹马的日行路程为315里，所以第17匹马的日行路程为$\frac{315}{1.05}=300$里，则这17匹马的日行路程之和为$\frac{300(1-1.05^{17})}{1-1.05}\approx7752$里，故选(B).

11. 【答案】A

【解析】令$\varphi(x)=x+\frac{1}{x}$，则$\varphi(x)$在$(1，+\infty)$上递增，因为$\log_{3.4}3.5-\log_{3.5}3.6=\frac{\lg3.5}{\lg3.4}-\frac{\lg3.6}{\lg3.5}=\frac{\lg^2 3.5-\lg3.4\lg3.6}{\lg3.4\lg3.5}$，$\lg3.4\lg3.6<(\frac{\lg3.4+\lg3.6}{2})^2=(\frac{\lg3.4\cdot3.6}{2})^2<\lg^2 3.5$，所以$\log_{3.4}3.5>\log_{3.5}3.6>1$，$a=\varphi(\log_{3.4}3.5)>b=\varphi(\log_{3.5}3.6)>\varphi(1)=2$，$c=\log_{\pi}3.7<2$，所以$a>b>c$，故选(A).

12. 【答案】D

【解析】解法1：作正方形$ABCE$，则$\angle DCE=60°$，因为$CD=2AB=2BC=4$，所以$DE\perp EC$，故BD为三棱锥$A-BCD$外接球的直径，即$BD^2=4R^2=20$，所以球O的表面积是$4\pi R^2=20\pi$，故选(D).



13. 【答案】6

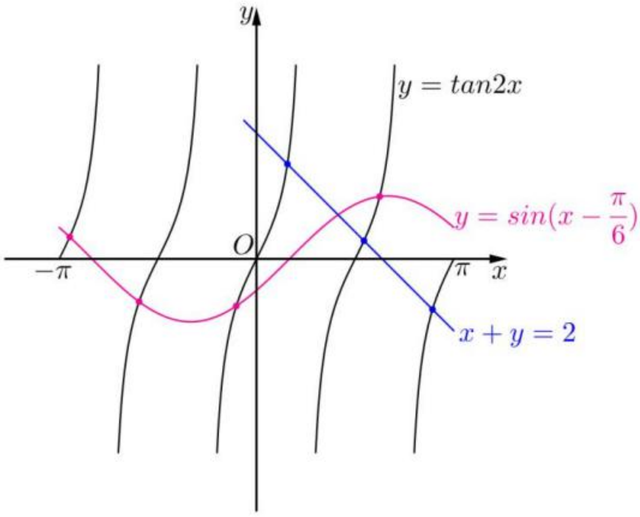
【解析】因为奇函数$f(x)=x^3+(a-5)x^2+ax(x\in\mathbf{R})$，所以$a=5$，即：$f(1)=6$.

14. 【答案】$(3，+\infty)$，7

【解析】因为不等式$ax^2-6x+3>0$对$x\in\mathbf{R}$恒成立，所以$\begin{cases}a>0\\ \triangle=36-12a<0\end{cases}$，解得：$a>3$，$a+\frac{9}{a-1}=a-1+\frac{9}{a-1}+1\geq7$，当且仅当$a=4$时取等号.

15．【答案】7

【解析】由图像可得：$m=4$，$n=3$，则 $m+n=7$．



16．【答案】$\frac{2\sqrt{15}}{3}$

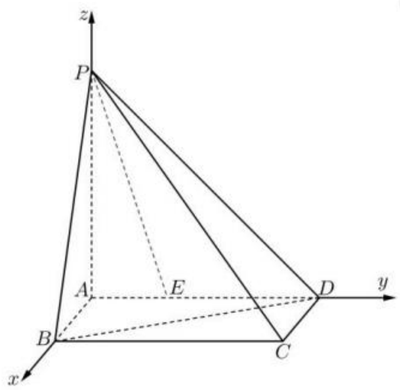
【解析】解法 1：因为 $k_{OP}k_{AB}=-2$，所以 $k_{OP}=-2$，而 P 的轨迹经过坐标原点 O，故中点 P 的轨迹所在的直线方程为 $y=-2x$，联立 $\begin{cases}x^2+\frac{y^2}{2}=1\\ y=-2x\end{cases}$ 可得：$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，故中点 P 的轨迹长度为 $\sqrt{1+(-2)^2}|\frac{\sqrt{3}}{3}-(-\frac{\sqrt{3}}{3})|=\frac{2\sqrt{15}}{3}$．

解法 2：横坐标不变，纵坐标缩短为原来的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍，则在新的坐标系中，可得下表：

项目	方程	直线 AB 的斜率	中点 P 的轨迹所在直线斜率	中点 P 的轨迹长度
变换前	$x^2+\frac{y^2}{2}=1$	1	-2	l
变换后	$x^2+y^2=1$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2}$	2

则 $l=2\frac{\sqrt{1+(-2)^2}}{\sqrt{1+(-\sqrt{2})^2}}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$．

17．【解析】(1)因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PA\perp CD$，又因为 $CD\perp AD$，$AD\cap PA=A$，所以 $CD\perp$ 平面 PAD，又因为 $CD\subsetneqq$ 平面 PCD，所以平面 $PAD\perp$ 平面 PCD；



(2)以 A 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B(1,0,0)$，$D(0,3,0)$，$P(0,0,3)$，$E(0,1,0)$，$\overrightarrow{BP}=(-1,0,3)$，$\overrightarrow{DP}=(0,-3,3)$，$\overrightarrow{PE}=(0,1,-3)$，设平面 PBD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}-x+3y=0\\ -3y+3z=0\end{cases}$，令 $y=1$，则 $\vec{n}=(3,1,1)$，

$\cos<\overrightarrow{PE},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{PE}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{PE}||\vec{n}|}=-\dfrac{\sqrt{110}}{55}$，故 PE 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{110}}{55}$.

18．**【解析】**(1)因为 $a c\sin B=8\sin A$，所以由正弦定理可得：$abc=8a$，即：$bc=8$，而 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A=8\cos A=4$，故 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，$A=\dfrac{\pi}{3}$；

(2)**解法 1：** $\sin A\sin B\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin B\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}[\cos(B-C)-\cos(B+C)]=\dfrac{\sqrt{3}}{4}[\cos(2B-\dfrac{2\pi}{3})+\dfrac{1}{2}]$，因为 $B\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，所以 $2B-\dfrac{2\pi}{3}\in(-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3})$，故 $\sin A\sin B\sin C\in(0,\dfrac{3\sqrt{3}}{8}]$.

19．**【解析】**分别记第 i 次摸到白球和黄球为事件 A_i，B_i，

(1)记“4 次摸球后，袋子中球的颜色只有一种”为事件 M，则 $P(M)=P(A_1A_2A_3A_4)=\dfrac{6}{10}\times\dfrac{7}{10}\times\dfrac{8}{10}\times\dfrac{9}{10}=0.3024$；

(2)X 的可能取值为 2，4，6，8，10.

$P(X=2)=P(B_1B_2B_3B_4)=\dfrac{4}{10}\times\dfrac{5}{10}\times\dfrac{6}{10}\times\dfrac{7}{10}=0.084$；

$P(X=4)=P(A_1B_2B_3B_4)+P(B_1A_2B_3B_4)+P(B_1B_2A_3B_4)+P(B_1B_2B_3A_4)=\dfrac{6}{10}\times\dfrac{3}{10}\times\dfrac{4}{10}\times\dfrac{5}{10}+\dfrac{4}{10}\times\dfrac{5}{10}\times\dfrac{4}{10}\times\dfrac{5}{10}+\dfrac{4}{10}\times\dfrac{5}{10}\times\dfrac{4}{10}\times\dfrac{5}{10}+\dfrac{4}{10}\times\dfrac{5}{10}\times\dfrac{6}{10}\times\dfrac{3}{10}=0.152$；

$P(X=8)=P(B_1A_2A_3A_4)+P(A_1B_2A_3A_4)+P(A_1A_2B_3A_4)+P(A_1A_2A_3B_4)=\dfrac{4}{10}\times\dfrac{5}{10}\times\dfrac{6}{10}\times\dfrac{7}{10}+\dfrac{6}{10}\times\dfrac{3}{10}\times\dfrac{6}{10}\times\dfrac{7}{10}+\dfrac{6}{10}\times\dfrac{7}{10}\times\dfrac{2}{10}\times\dfrac{7}{10}+\dfrac{6}{10}\times\dfrac{7}{10}\times\dfrac{8}{10}\times\dfrac{1}{10}=0.252$；

$P(X=10)=0.3024$；

$P(X=6)=1-0.084-0.136-0.252-0.3024=0.2096$；

X 的分布列为：

X	2	4	6	6	8	10
P	0.084	0.152	0.2096	0.152	0.252	0.3024

$EX=2\times0.084+4\times0.152+6\times0.2096+8\times0.252+10\times0.3024=7.0736$.

20．【解析】(1)当 P 在 C 的外部时，$0<p<\frac{1}{2}$，$|AF|+|AP|\geqslant|PF|$，此时$|PF|<2$，不成立；

当 P 在 C 的内部时，设 A 在 C 的准线上的投影为 M，$|AF|+|AP|=|AM|+|AP|\geqslant1+\frac{p}{2}$，当且仅当 A、P、M 共线时取等号，则 $1+\frac{p}{2}=2$，解得：$p=2$，故 C 的方程为 $y^2=4x$；

(2)设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$Q(x，y)$，直线 AP 的斜率不为 0，设 AP 的方程为：$x=my+1-m$，联立方程$\begin{cases}y^2=4x\\x=my+1-m\end{cases}$可得：$y^2-4my+4m-4=0$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=4m-4$，因为$\overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{QB}=\mu\overrightarrow{PB}$，所以$\lambda+\mu=\frac{y_1-y}{y_1-1}+\frac{y_2-y}{y_2-1}=2+\frac{1-y}{y_1-1}+\frac{1-y}{y_2-1}=2+\frac{(1-y)(y_1+y_2-2)}{y_1y_2-(y_1+y_2)+1}=2-\frac{4m(1-y)-2+2y}{3}=4$，即：$2m(y-1)=y+2$，而 $x=my+1-m$，所以 $2x-y-4=0$.

21．【解析】(1)因为 $f(x)=x\ln x$，所以 $f'(x)=\ln x+1$，令 $f'(x)=2$ 可得：$x=\mathrm{e}$，$f(\mathrm{e})=\mathrm{e}$，故 $m=y-2x=\mathrm{e}$；

(2)当 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$时，$f'(x)<0$，当 $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0，1)$上递减，在$(1，+\infty)$上递增，故 $f(x)\geqslant f(\frac{1}{\mathrm{e}})=-\frac{1}{\mathrm{e}}$，即：$\ln x\geqslant-\frac{1}{\mathrm{e}x}$，所以 $\ln\frac{1}{x}\geqslant-\frac{x}{\mathrm{e}}$，即：$\frac{\ln x}{x}\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$，令$\varphi(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{2x^3}$，$\varphi'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(x-3)}{2x^4}$，当 $x<3$ 时，$\varphi'(x)<0$，当 $x>3$ 时，$\varphi'(x)>0$，所以$\varphi(x)\geqslant\varphi(3)=\frac{\mathrm{e}^3}{54}=\frac{\mathrm{e}^4}{54\mathrm{e}}>\frac{1}{\mathrm{e}}$，则$\frac{\ln x}{x}<\frac{\mathrm{e}^x}{2x^3}$，即：$f(x)<\frac{\mathrm{e}^x}{2x}$，故$-\frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant f(x)<\frac{\mathrm{e}^x}{2x}$.

22．【解析】(1)曲线 M 的方程为：$x^2+y^2-4x=0(y\geqslant0)$，故 M 的极坐标方程为：$\rho^2-4\rho\cos\theta=0(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$，即：$\rho=4\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$，而曲线 N 的方程为 $xy=9$，故曲线 N 的极坐标方程为$\rho^2\sin2\theta=18$；

(2)因为$|OA|^2\cdot|OB|^2=16\cos^2\theta_0\cdot\frac{18}{\sin2\theta_0}=144$，即 $\tan\theta_0=1$，故$\theta_0=\frac{\pi}{4}$.

23．【解析】(1)$f(x)=|x-a-1|+|x-2a|\geqslant|(x-a-1)-(x-2a)|=|a-1|$，当 $a\in[2，+\infty)$时，$f(x)\geqslant|a-1|\geqslant1$，故存在 $a\in(0，+\infty)$，使得 $f(x)\geqslant1$ 恒成立；

(2)因为当 $x\in[2a，4]$时，$f(x)=|x-a-1|+x-2a\leqslant x+a$，即：$|x-a-1|\leqslant3a$，所以 $0<a<2$，

此时 $1-2a\leqslant x\leqslant 4a+1$，故$[2a，4]\in[1-2a，4a+1]$，即：$\begin{cases}4a+1\geqslant 4\\1-2a\leqslant 2a\end{cases}$，解得：$\frac{3}{4}\leqslant a<2$，故 a 的取值范围为$[\frac{3}{4}，2)$.