高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|x(x-3)<0\}$，$B=\{0,1,2,3\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0,1,2,3\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{1,2\}$

2. 在复平面内，复数 z 所对应点的坐标为 $(1,-1)$，则 $\frac{5}{z^2+1}=$

A. $1+2i$　　B. $1-2i$　　C. $\frac{5}{4}+\frac{5}{4}i$　　D. $\frac{5}{4}-\frac{5}{4}i$

3. 已知平面向量 $a=(1,3)$，$b=(2,-1)$，若 $a\perp(a+\lambda b)$，则实数 λ 的值为

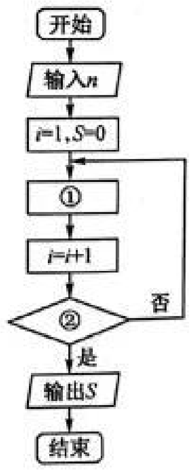
A. 10　　B. 8　　C. 5　　D. 3

4. 已知命题 p：$\forall x>0,2^x\geqslant1$；命题 q：$\exists x\in\mathbf{R},\cos x=\frac{\pi}{3}$，则下列命题中为真命题的是

A. $p\wedge q$　　B. $\neg p\vee q$

C. $p\wedge\neg q$　　D. $\neg(p\vee q)$

5. 某同学为了求 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$，设计了如图所示的程序框图，在该程序框图中，①和②两处应分别填入



A. $S=S+i^2,i\geqslant n$

B. $S=S+(i-1)^2,i\geqslant n+1$

C. $S=S+i^2,i>n$

D. $S=S+(i+1)^2,i\geqslant n-1$

6. 在区域 $\Omega:\begin{cases}x-y\geqslant0,\\x+y\leqslant6,\\y\geqslant0\end{cases}$ 内任取一点 $P(x,y)$，则满足 $x+y>4$ 的概率为

A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{5}{9}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

7. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$，则下列判断正确的是

A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π　　B. $f(x)$ 的最大值为2

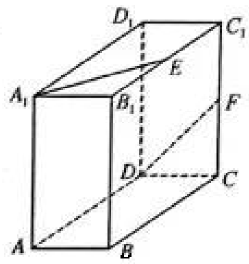
C. $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增　　D. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称

8. 某文具店开业期间，用 100 根相同的圆柱形铅笔堆成横截面为“等腰梯形垛”的装饰品，其中最下面一层铅笔数为 16 根，从最下面一层开始，每一层的铅笔数比上一层的铅笔数多 1 根，则该“等腰梯形垛”最上面一层堆放的铅笔数为

A. 8　　B. 9

C. 10　　D. 11

9. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，$AA_1=AD=2$，点 E，F 分别为 B_1C_1，CC_1 的中点，则 A_1E 与 DF 所成的角为



A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

10. 已知 $f(x)=\frac{a^x}{1+a^x}(a>0$，且 $a\neq1)$，则下列函数为奇函数的是

A. $f(x-1)+\frac{1}{2}$　　B. $f(x+1)-\frac{1}{2}$

C. $f(x)+\frac{1}{2}$　　D. $f(x)-\frac{1}{2}$

11. 已知点 F_1，F_2 分别为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，M 为 C 的左支上一点，$|MF_1|=|F_1F_2|=2c$，若圆 $F_1:(x+c)^2+y^2=c^2$ 与直线 MF_2 相切，则 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　B. $\sqrt{3}+1$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

12. 已知实数 x，y 满足 $3^x=4$，$4^y=9$，则下列结论错误的是

A. $x^2y^2=3^x$　　B. $x<y$

C. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\sqrt{2}$　　D. $x+y>2xy$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

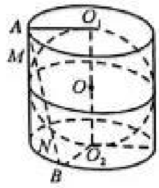
13. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=2$，$a_6=8$，则 $a_4=$________.

14. 蟋蟀鸣叫可以说是大自然的音乐，殊不知蟋蟀鸣叫的频率 P(每分钟鸣叫的次数)与气温 T(单位：℃)有着很大的关系. 某观测人员由下列表中的观测数据计算出 P 关于 T 的线性回归方程 $\hat{P}=5T-160$，那么下表中 k 的值为________.

T(℃)	38	41	42	39
P(次数/分钟)	29	44	k	36

15. 已知点 F 为抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点，点 M 为 C 上一点，点 N 为 C 的准线上一点，若△MNF 为等边三角形，则△MNF 的面积为________.

16. 传说古希腊数学家阿基米德的墓碑上刻着一个圆柱，圆柱内有一个内切球，这个球的直径恰好与圆柱的高相等. 由于这个“圆柱容球”是阿基米德生前最引以为豪的发现，于是他留下遗言：他死后，墓碑上要刻上一个“圆柱容球”的几何图形. 如图，在底面半径为 1 的圆柱 O_1O_2 内的球 O 与圆柱 O_1O_2 的上、下底面及母线均相切，设 A，B 分别为圆柱 O_1O_2 的上、下底面圆周上一点，且 O_1A 与 O_2B 所成的角为 $90°$，直线 AB 与球 O 的球面交于两点 M，N，则 MN 的值为________.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

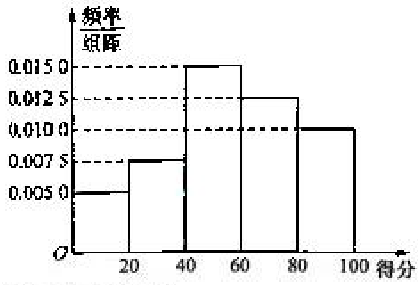
在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)$.

(1)求角C的大小；

(2)若$c=\sqrt{2}$，$A=\frac{\pi}{3}$，求$\triangle ABC$的面积.

18.（本小题满分 12 分）

为缓解城市垃圾带来的问题，许多城市实行了生活垃圾强制分类. 为了加强学生对垃圾分类意义的认识以及养成良好的垃圾分类的习惯，某学校团委组织了垃圾分类知识竞赛活动. 设置了四个箱子，分别标有"厨余垃圾""有害垃圾""可回收物""其他垃圾"；另有写有垃圾名称的卡片若干张. 每位参赛选手从所有写有垃圾名称的卡片中随机抽取 20 张，按照自己的判断，将每张卡片放入对应的箱子中. 规定每正确投放一张卡片得 5 分，投放错误得 0 分. 比如将写有"废电池"的卡片放入写有"有害垃圾"的箱子得 5 分，放入其他箱子得 0 分. 从所有参赛选手中随机抽取 40 人，将他们的得分分成以下 5 组：$[0,20]$，$(20,40]$，$(40,60]$，$(60,80]$，$(80,100]$，绘成如下频率分布直方图：



(1)求得分的平均数(每组数据以中点值代表)；

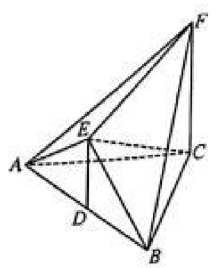
(2)学校规定得分在 80 分以上的为"垃圾分类知识达人". 为促进社区的垃圾分类，学校决定从抽取的 40 人中的"知识达人"(其中含A,B两位同学)中选出两人利用节假日到社区进行垃圾分类知识宣讲，求A,B两人至少 1 人被选中的概率.

19.（本小题满分 12 分）

如图，平面$ABE\perp$平面ABC，$\triangle ABC$是等边三角形，D为AB的中点，$BC=CF=2$，$FA=FB=2\sqrt{2}$，$EA=EB$.

(1)证明：$DE/\!/CF$；

(2)求三棱锥$C-BEF$的体积.



20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F,左、右顶点分别为 A,B,过点 F 任作一条直线 l,与 C 交于异于 A,B 的 M,N 两点.

(1)设直线 MA,MB 的斜率分别为 k_{MA},k_{MB},求证:$k_{MA}\cdot k_{MB}$ 为定值;

(2)设直线 NB 的斜率为 k_{NB},是否存在正常数 λ,使得 $k_{MA}=\lambda k_{NB}$? 若存在,求出 λ 的值;若不存在,请说明理由.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x$.

(1)求过点(0,0)且与曲线 $y=f(x)$ 相切的切线方程;

(2)求证:$e^2 f(x)<e^x$.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)**选修 4-4:坐标系与参数方程**

在平面直角坐标系 xOy 中,倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线 l 过点 $A(-1,0)$,以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$.

(1)写出直线 l 的一个参数方程及曲线 C 的直角坐标方程;

(2)若 l 与 C 交于 M,N 两点,求 $\frac{1}{|AM|}+\frac{1}{|AN|}$ 的值.

23.(本小题满分 10 分)**选修 4-5:不等式选讲**

已知 $f(x)=|x+2|+|x-1|$.

(1)解不等式 $f(x)\leqslant x+8$;

(2)若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant m^2-2m$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,求实数 m 的取值范围.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. D　由题意知 $A=\{x|0<x<3\}$，所以 $A\cap B=\{1,2\}$. 故选 D.

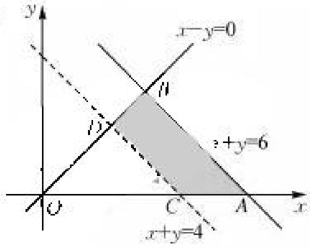
2. A　由题意知 $z=1-\mathrm{i}$，所以 $\frac{5}{z^2+1}=\frac{5}{(1-\mathrm{i})^2+1}=\frac{5}{1-2\mathrm{i}}=\frac{5(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=1+2\mathrm{i}$. 故选 A.

3. A　因为 $\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1)$，所以 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(1+2\lambda,3-\lambda)$. 因为 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})$，所以 $1+2\lambda+3(3-\lambda)=0$，解得 $\lambda=10$. 故选 A.

4. C　由题意知 p 为真命题，q 为假命题，所以 $p\wedge q$，$\neg p\vee q$，$\neg(p\vee q)$ 为假命题，$p\wedge\neg q$ 为真命题. 故选 C.

5. C　显然①处应填入 $S=S+i^2$；对于②处，因为当 $i=n$ 时，不满足 $i>n$，再执行循环体，故最后一个加数为 n^2，符合题目要求，其他不能满足题目要求. 故选 C.

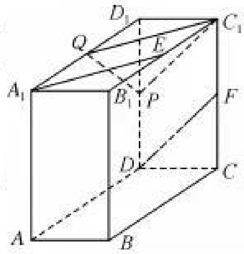
6. B　画出区域 Ω(图中$\triangle OAB$ 及内部)，区域内满足 $x+y>4$ 的区域为图中四边形 $ABDC$ 的内部及边界(不包括 CD)，且 $OC=4$，$OA=6$，$CD/\!/AB$，所以$\triangle OCD\backsim\triangle OAB$，所以 $\frac{S_{\triangle OCD}}{S_{\triangle OAB}}=\left(\frac{4}{6}\right)^2=\frac{4}{9}$，故所求概率 $P=\frac{S_{\text{四边形}ABDC}}{S_{\triangle OAB}}=\frac{5}{9}$. 故选 B.



7. D　由题意得 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，所以其最小正周期为 π，最大值为 1，单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin(-\pi)=0$，所以 ABC 错误，D 正确. 故选 D.

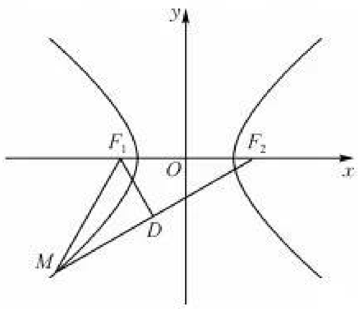
8. B　记最下面一层铅笔数为 $a_1=16$，一共放 n 层，从下到上各层的铅笔数构成公差为 -1 的等差数列，则 $16n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-1)=100$，整理得 $(n-8)(n-25)=0$，解得 $n=8$ 或 $n=25$. 当 $n=8$ 时，$a_8=16+7\times(-1)=9$；当 $n=25$ 时，$a_{25}=16+24\times(-1)=-8$，不合题意，舍去，故最上面一层堆放的铅笔数为 9. 故选 B.

9. C　分别取 DD_1，A_1D_1 的中点 P，Q，连接 C_1P，C_1Q，PQ，易证 $C_1P/\!/DF$，$C_1Q/\!/A_1E$，所以 $\angle PC_1Q$ 为所求的角(或其补角). 又 $AB=1$，$AA_1=AD=2$，所以 $C_1P=\sqrt{2}=C_1Q=PQ$，所以 $\angle PC_1Q=\frac{\pi}{3}$. 故选 C.



10. D　因为 $f(x)+f(-x)=\frac{a^x}{1+a^x}+\frac{a^{-x}}{1+a^{-x}}=\frac{a^x}{1+a^x}+\frac{1}{1+a^x}=1$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 对称，故 $f(x)$ 的图象向下平移 $\frac{1}{2}$ 单位长度后得到的图象关于原点对称. 故选 D.

11. A　作 $F_1D\perp MF_2$，垂足为 D，由题意，得 $|DF_1|=c$. 因为 $|F_1F_2|=2c$，所以 $|DF_2|=\sqrt{3}c$，$|MF_2|=2\sqrt{3}c$，又 $|MF_2|-|MF_1|=2a$，即 $2\sqrt{3}c-2c=2a$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，即 $e=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. 故选 A.

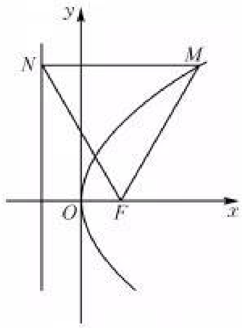


12. D　由 $3^x=4$，$4^y=9$ 得 $x=\log_3 4$，$y=\log_4 9$，所以 $xy=\log_3 4\times\log_4 9=2$，所以 $x^2y^2=4=3^x$，故 A 正确；$\log_3 4<\log_3\sqrt{27}=\frac{3}{2}$，$\log_4 9>\log_4 8=\log_4 4^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$，所以 $x<y$，故 B 正确；$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>2\sqrt{\frac{1}{xy}}=\sqrt{2}$，故 C 正确；由选项 A，得 $xy=2$，则 $2xy=4$；另一方面，$\log_3 4<2$，$\log_4 9<2$，则 $x+y<4$，所以 $x+y>2xy$ 不成立，故 D 错误. 故选 D.

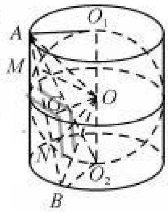
13. 4　设公比为 q，则 $q^4=\frac{a_6}{a_2}=4$，所以 $q^2=2$，所以 $a_4=a_2q^2=4$.

14. 51　$\bar{T}=40$，$\bar{P}=\frac{1}{4}(29+44+k+36)=\frac{1}{4}(109+k)$，代入 $\hat{P}=5T-160$，解得 $k=51$.

15. $16\sqrt{3}$　由题意知$|MF|=|MN|$，则 MN 与准线垂直，又$\triangle MNF$ 为正三角形，所以 NF 与准线所成的锐角为 $30°$，所以$|NF|=8$，所以$\triangle MNF$ 的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}\times8^2=16\sqrt{3}$.



16. $\sqrt{2}$　连接 OA，OB，O_2A，由$\triangle OAO_1\cong\triangle OBO_2$，得 $OA=OB$，取 AB 的中点为G，则 $OG\perp AB$；因为 $OA^2=O_1O^2+O_1A^2=2$，$AB^2=O_2A^2+O_2B^2=O_1A^2+O_1O_2^2+O_2B^2=6$，所以 $OG=\sqrt{OA^2-AG^2}=\sqrt{2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；由 $OM=ON$ 及 $OG\perp AB$，得 G 也是 MN 的中点，所以 $MN=2\sqrt{OM^2-OG^2}=2\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$.



17. 解：(1)因为$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{1}{2}ab\sin C$，所以$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)$. ………………………… 2 分

又 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$，所以$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{4}\times2ab\cos C$，………………………… 4 分

所以 $\tan C=1$，又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{4}$. ………………………… 6 分

(2)因为 $A=\frac{\pi}{3}$，$C=\frac{\pi}{4}$，

所以 $\sin B=\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$. ………………………… 8 分

由正弦定理，得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}=2$，所以 $a=2\sin A=\sqrt{3}$，………………………… 10 分

所以$\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$. ………………………… 12 分

18. 解：(1)由频率分布直方图可求得各组的频率自左到右依次为：0.1，0.15，0.3，0.25，0.2，………………………… 2 分

所以得分的平均数 $\bar{x}=10\times0.1+30\times0.15+50\times0.3+70\times0.25+90\times0.2=56$. ………………………… 4 分

(2)所抽取的 40 人中，得分在 80 分以上的有 $40\times0.2=8$ 人，………………………… 5 分

由题意知 A，B 在 8 人之中，余下 6 人记作 a，b，c，d，e，f，从中抽取 2 人的基本事件有：AB，Aa，Ab，Ac，Ad，Ae，Af，Ba，Bb，Bc，Bd，Be，Bf，ab，ac，ad，ae，af，bc，bd，be，bf，cd，ce，cf，de，df，ef，共 28 个，………………………… 8 分

其中含有 A 或 B 的基本事件有 AB，Aa，Ab，Ac，Ad，Ae，Af，Ba，Bb，Bc，Bd，Be，Bf，共 13 个，………………………… 10 分

故所求概率为$\frac{13}{28}$. ………………………… 12 分

19. (1)证明：因为 $EA=EB$，D 为 AB 的中点，所以 $DE\perp AB$，………………………… 1 分

因为平面 $ABE\perp$平面 ABC，平面 $ABE\cap$平面 $ABC=AB$，$DE\subset$平面 ABE，

所以 $DE\perp$平面 ABC. ………………………… 2 分

因为 $BC=CF=2$，$FB=2\sqrt{2}$，所以 $BC^2+CF^2=FB^2$，所以 $CF\perp BC$，

同理 $CF\perp AC$. ………………………… 3 分

因为 $AC\cap BC=C$，AC，$BC\subset$平面 ABC，

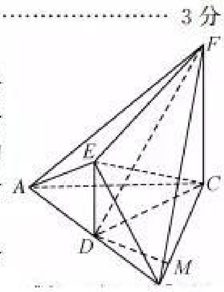
所以 $CF\perp$平面 ABC，………………………… 4 分

所以 $DE/\!/CF$. ………………………… 5 分

(2)解：连接 CD，FD，由(1)知 $DE/\!/$平面 BCF，则 E 到平面 BCF 的距离等于 D 到平面 BCF 的距离，所以 $V_{三棱锥C\text{-}BEF}=V_{三棱锥E\text{-}BCF}=V_{三棱锥D\text{-}BCF}$，………………………… 6 分

作 $DM\perp BC$，垂足为 M，因为 $CF\perp$平面 ABC，$DM\subset$平面 ABC，所以 $CF\perp DM$，

又 $BC\cap CF=C$，BC，$CF\subset$平面 BCF，所以 $DM\perp$平面 BCF. ………………………… 8 分



又 $DM=DB\sin\angle DBC=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$， …………………………………………………… 9分

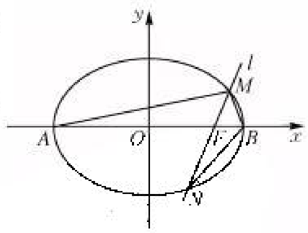
所以 $V_{三棱锥D\text{-}BCF}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCF}\cdot DM=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$， …………………………………… 11分

所以 $V_{三棱锥C\text{-}BEF}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. …………………………………………………………………… 12分

20.(1)证明：由题设知直线 MA，MB 的斜率存在且均不为0，$A(-2,0)$，$B(2,0)$. …………………… 1分

设 $M(x_1,y_1)(y_1\neq0)$，则 $3x_1^2+4y_1^2=12$，即 $x_1^2-4=-\frac{4}{3}y_1^2$. …………………………………… 3分

所以 $k_{MA}k_{MB}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_1}{x_1-2}=\frac{y_1^2}{x_1^2-4}=\frac{y_1^2}{-\frac{4}{3}y_1^2}=-\frac{3}{4}$为定值. …………………………… 5分



(2)解：法一：设 $N(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为 $x=ty+1$，代入 $3x^2+4y^2=12$，整理得 $(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$，显然 $\Delta>0$，

则 $y_1+y_2=\frac{-6t}{3t^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3t^2+4}$. ………………………………………………… 7分

$k_{MB}k_{NB}=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{y_1}{ty_1-1}\cdot\frac{y_2}{ty_2-1}=\frac{y_1y_2}{t^2y_1y_2-t(y_1+y_2)+1}$

$=\frac{\frac{-9}{3t^2+4}}{t^2\cdot\frac{-9}{3t^2+4}-t\cdot\frac{-6t}{3t^2+4}+1}=-\frac{9}{4}$. ………………………………………… 9分

由(1)，得 $k_{MA}k_{MB}=-\frac{3}{4}$，则$\frac{k_{MA}}{k_{NB}}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{k_{MB}k_{NB}}=-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{4}{9}\right)=\frac{1}{3}$，取 $\lambda=\frac{1}{3}>0$. …………………… 11分

综上，存在正常数 $\lambda=\frac{1}{3}$，使得 $k_{MA}=\frac{1}{3}k_{NB}$. ……………………………………………… 12分

法二：设 $N(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为 $x=my+1$，代入 $3x^2+4y^2=12$，并整理得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，显然 $\Delta>0$，

则 $y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$. （※） …………………………………………… 7分

因为 $k_{MA}=\frac{y_1}{x_1+2}$，$k_{NB}=\frac{y_2}{x_2-2}$. …………………………………………………………… 8分

所以$\frac{k_{MA}}{k_{NB}}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\frac{y_1(my_2+1-2)}{y_2(my_1+1+2)}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}=\frac{my_1y_2-(y_1+y_2)+y_2}{my_1y_2+3y_2}$， ……………………… 10分

将(※)代入，得$\frac{k_{MA}}{k_{NB}}=\frac{m\cdot\frac{-9}{3m^2+4}-\frac{-6m}{3m^2+4}+y_2}{m\cdot\frac{-9}{3m^2+4}+3y_2}=\frac{\frac{-3m}{3m^2+4}+y_2}{\frac{-9m}{3m^2+4}+3y_2}=\frac{1}{3}$. ………………………… 11分

综上，存在正常数 $\lambda=\frac{1}{3}$，使得 $k_{MA}=\frac{1}{3}k_{NB}$. ……………………………………………… 12分

21.(1)解：设曲线 $y=f(x)$ 过点(0,0)的切线为 l，且 l 与曲线 $y=f(x)$ 切于点 $(x_0,\ln x_0)$. ……………… 1分

由 $f(x)=\ln x$，得 $f'(x)=\frac{1}{x}$，所以 $f'(x_0)=\frac{1}{x_0}$，所以 l 的斜率为$\frac{1}{x_0}$， ……………………………… 2分

所以 l 的方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$.

因为 l 过点(0,0)，所以$-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(-x_0)$，解得 $x_0=\mathrm{e}$， ………………………………………… 4分

故切线 l 的方程为 $y-\ln\mathrm{e}=\frac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})$，即 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$. ……………………………………………… 6分

(2)证明：法一（隔离直线）：要证 $\mathrm{e}^2f(x)<\mathrm{e}^x$ 即证 $\mathrm{e}^x>\mathrm{e}^2\ln x$. ……………………………………… 7分

设 $g(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x(x>0)$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$，

所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$在(0,1)上为减函数，在$(1,+\infty)$上为增函数，

所以 $x=1$ 是 $g(x)$的极小值点，也是 $g(x)$的最小值点，且 $g(x)_{\min}=g(1)=0$，

故 $\mathrm{e}^x\geqslant\mathrm{e}x$(当且仅当 $x=1$ 时取等号). ……………………………………………………… 9分

设 $h(x)=x-\mathrm{e}\ln x(x>0)$，则 $h'(x)=1-\frac{\mathrm{e}}{x}=\frac{x-\mathrm{e}}{x}$，

所以当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$h'(x)<0$；当 $x>\mathrm{e}$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$在$(0,\mathrm{e})$上为减函数，在$(\mathrm{e},+\infty)$上为增函数，

所以 $x=\mathrm{e}$ 是 $h(x)$的极小值点，也是 $h(x)$的最小值点，且 $h(x)_{\min}=h(\mathrm{e})=0$，

故 $x\geqslant e\ln x$（当且仅当 $x=e$ 时取等号），所以 $e^x\geqslant e^2\ln x$.

综上，$e^2f(x)<e^x$. ………… 12 分

法二（虚设零点）：设 $g(x)=e^x-e^2\ln x$，则 $g'(x)=e^x-\frac{e^2}{x}$，$(g'(x))'=e^x+\frac{e^2}{x^2}>0$，

所以 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， ………… 8 分

又 $g'(1)=e-e^2<0$，$g'(2)=e^2-\frac{e^2}{2}=\frac{e^2}{2}>0$，

则存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $g'(x_0)=e^{x_0}-\frac{e^2}{x_0}=0$，即 $e^{x_0}=\frac{e^2}{x_0}$，所以 $\ln x_0=2-x_0$. ………… 9 分

所以，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

所以，$g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增， ………… 10 分

所以，$g(x)$ 在 $x=x_0$ 处有极小值，且极小值为 $g(x_0)=e^{x_0}-e^2\ln x_0=\frac{e^2}{x_0}+e^2x_0-2e^2>2e^2-2e^2=0$.

因此 $g(x)>0$，即 $e^x-e^2\ln x>0$.

综上，$e^2f(x)<e^x$. ………… 12 分

法三（极值翻转）：要证 $e^2f(x)<e^x$，即证 $e^x>e^2\ln x$，即证 $\frac{e^x}{x}>\frac{e^2\ln x}{x}$. ………… 7 分

设 $g(x)=\frac{e^x}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=e$. ………… 9 分

设 $h(x)=\frac{e^2\ln x}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{e^2(1-\ln x)}{x^2}$，当 $0<x<e$ 时，$h'(x)>0$，当 $x>e$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h(x)_{\max}=h(e)=e$. ………… 11 分

综上，$g(x)\geqslant e$，$e\geqslant h(x)$，且这两次取等号的条件不相同，

故 $e^2f(x)<e^x$ 成立. ………… 12 分

22. 解：(1) 因为 l 过点 $A(-1,0)$ 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，

所以 l 的一个参数方程为 $\begin{cases}x=-1+\frac{1}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）； ………… 2 分

因为 $\rho=4\sin\theta$，所以 $\rho^2=4\rho\sin\theta$，

又 $\rho^2=x^2+y^2$，$y=\rho\sin\theta$，所以 $x^2+y^2=4y$，即 $x^2+(y-2)^2=4$. ………… 4 分

(2) 将 l 的参数方程代入曲线 C 的直角坐标方程，得 $t^2-(2\sqrt{3}+1)t+1=0$， ………… 6 分

则 $\Delta=(-2\sqrt{3}-1)^2-4=9+4\sqrt{3}>0$， ………… 7 分

设点 M,N 所对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=2\sqrt{3}+1$，$t_1t_2=1$，

由于 $t_1+t_2>0$，$t_1t_2>0$，所以 t_1,t_2 均大于 0. ………… 8 分

所以 $\frac{1}{|AM|}+\frac{1}{|AN|}=\frac{|AM|+|AN|}{|AM|\cdot|AN|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1|\cdot|t_2|}=\frac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=2\sqrt{3}+1$. ………… 10 分

23. 解：(1) $f(x)=|x+2|+|x-1|=\begin{cases}-2x-1, & x<-2,\\ 3, & -2\leqslant x<1,\\ 2x+1, & x\geqslant 1,\end{cases}$ ………… 1 分

当 $x<-2$ 时，$f(x)\leqslant x+8$ 可化为 $-2x-1\leqslant x+8$，解得 $x\geqslant -3$，所以 $-3\leqslant x<-2$； ………… 2 分

当 $-2\leqslant x<1$ 时，$f(x)\leqslant x+8$ 可化为 $3\leqslant x+8$，解得 $x\geqslant -5$，所以 $-2\leqslant x<1$； ………… 3 分

当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)\leqslant x+8$ 可化为 $2x+1\leqslant x+8$，解得 $x\leqslant 7$，所以 $1\leqslant x\leqslant 7$. ………… 4 分

综上，不等式 $f(x)\leqslant x+8$ 的解集为 $[-3,7]$. ………… 5 分

(2) 关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant m^2-2m$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立等价于 $f(x)_{\min}\geqslant m^2-2m$， ………… 6 分

$f(x)=|x+2|+|x-1|\geqslant|x+2-x+1|=3$， ………… 7 分

当且仅当 $(x+2)(x-1)\leqslant 0$，即 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时等号成立，所以 $f(x)_{\min}=3$， ………… 8 分

所以 $3\geqslant m^2-2m$，解得 $-1\leqslant m\leqslant 3$.

故实数 m 的取值范围为 $[-1,3]$. ………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。