河南省 2024 届高三起点考试
数学参考答案、解析及评分标准

一、单选题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	D	A	A	B	C	D

二、多选题

题号	9	10	11	12
答案	AC	BCD	ABD	BC

三、填空题

13.___ $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ____　　**14.**____ 2 ____

15._____ $y=\log_a|x|(a>1)$ 均可以 _____　　**16.**___ $\{0,\frac{5}{6}\pi,\pi\}$ __

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（1）当 $n=1,S_1=-13$;……………………1分

$n\geq 2$ 且 $n\in Z,a_n=S_n-S_{n-1}=2n-15$; ……………………3分

所以 $a_n=2n-15$ ……………………………………4 分

（2）当 $n=7$ 时，a_7,a_8 异号；$n\neq 7,a_n,a_{n+1}$ 同号

$$|a_na_{n+1}|=\begin{cases}1,n=7\\(2n-15)(2n-13),n\in N_+\text{且}n\neq 7\end{cases}$$ ……………………………………6 分

$$T_{13}=\frac{1}{a_1a_2}+\cdots+\frac{1}{a_6a_7}-\frac{1}{a_7a_8}+\cdots+\frac{1}{a_{13}a_{14}}=(\frac{1}{a_1a_2}+\cdots+\frac{1}{a_7a_8}+\cdots+\frac{1}{a_{13}a_{14}})-\frac{2}{a_7a_8}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{14}})+2=\frac{25}{13}$$

因此：$T_{13}=\dfrac{25}{13}$ ……………………10 分

18.（1）在 ΔABC 中 $2\sin(B-C)=\sin A$，所以 $2\sin(B-C)=\sin(B+C)$ $\therefore 3\cos B\sin C=\sin B\cos C$

$\Rightarrow \tan B=3\tan C$ ……………………2 分

ΔABC 中 B,C 为锐角，由 $\sin C=\dfrac{4}{5}$ 得到 $\tan C=\dfrac{4}{3}$，所以 $\tan B=4$，……………………4 分

因此 $\sin B=\dfrac{4}{17}\sqrt{17}$；……………………6 分

（2）ΔABC 中 $\sin A=\sin(\mathrm{B+C})=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\dfrac{16}{5\sqrt{17}}$，……………………8 分

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ $\therefore b=4$，……………………10 分

因此 ΔABC 的面积等于 $\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{128}{25}$．……………12 分

19. (1)证明：在 $\triangle ABC$ 中，设 $BC=2AB=2$，因为 $\angle ACB=30^\circ$，

由正弦定理可知：$\dfrac{\sin\angle BAC}{BC}=\dfrac{\sin\angle ACB}{AB}$ $\therefore \sin\angle BAC=1\Rightarrow AB\perp AC$ …………2 分

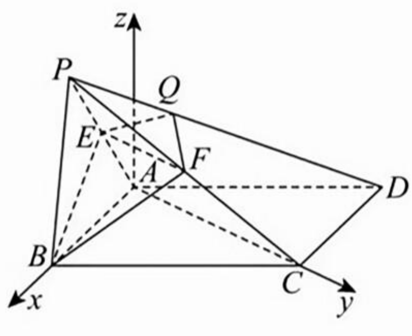
又因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，
$AB\perp AC$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AC\perp$ 平面 PAB，
由 $PB\subset$ 平面 PAB，所以 $PB\perp AC$．……………………4 分

(2) 在 $\triangle PAC$ 中，因为直线 $AC//$ 平面 α，平面 $PAC\cap$ 平面 $\alpha=EF$，
所以直线 $EF//$ 直线 AC，且直线 EF 过点 H，所以点 F 为线段 PC 中点．………6 分

以点 A 为坐标原点，AB,AC 分别为 x 轴，y 轴，过点 A 垂直于平面 $ABCD$ 的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，设 $AB=2$．

则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C\left(0,2\sqrt{3},0\right)$，$D\left(-2,2\sqrt{3},0\right)$，$P\left(1,0,\sqrt{3}\right)$．………8 分

因为点 E 为线段 PA 中点，所以，$E\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$



设平面 BEF 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{BE}=\left(-\dfrac{3}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\left(0,\sqrt{3},0\right)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\ \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ \sqrt{3}y=0\end{cases}$，令 $x=1$，则

$\overrightarrow{n_1}=\left(1,0,\sqrt{3}\right)$. ……………………10 分

且 $\overrightarrow{PC}=(-1,2\sqrt{3},-\sqrt{3})$

所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{PC}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PC}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{PC}\right|}=-\dfrac{1}{2}$

所以直线 PC 与平面 α 所成角的正弦值 $\dfrac{1}{2}$. ……………………12 分

20. (1) 设多选题正确答案是"选两项"为事件 A_2，正确答案是"选三项"为事件 A_3，则 $\Omega=A_2\cup A_3$.

考生得 0 分，2 分为事件 B_0，B_2，$P(A_2)=p_0$，$p(A_3)=1-p_0$.

因为 $B_0=A_2B_0\cup A_3B_0$，

所以 $P(B_0)=P(A_2B_0\cup A_3B_0)=P(A_2B_0)+P(A_3B_0)=P(B|A_2)P(A_2)+P(B_0|A_3)P(A_3)$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{C_2^1}{C_4^1}\right)+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{C_1^1}{C_4^1}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{8}$. ……………………2 分

因为 $B_2=A_2B_2\cup A_3B_2$，

所以 $P(B_2)=P(A_2B_2\cup A_3B_2)=P(A_2B_2)+P(A_3B_2)=P(B_2|A_2)P(A_2)+P(B_2|A_3)P(A_3)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{C_2^1}{C_4^1}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{C_3^1}{C_4^1}=\dfrac{5}{8}$， ……………………4 分

所以，得分 X 的分布列为：

X	0	2
P	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{5}{8}$

得分 X 的数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{3}{8}+2\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{5}{4}$. ……………………6 分

（2）方案一：随机选择一个选项

正确答案是"选两项"时，考生选 1 项，选对得 2 分，选错得 0 分；

正确答案是"选三项"时，考生选 1 项，选对得 2 分，选错得 0 分.

因为 $B_0=A_2B_0\cup A_3B_0$，

所以 $P(B_0)=P(B_0|A_2)P(A_2)+P(B_0|A_3)P(A_3)=p_0\times\dfrac{2}{4}+(1-p_0)\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}p_0$.

因为 $B_2=A_2B_2\cup A_3B_2$，

所以 $P(B_2)=P(B_2|A_2)P(A_2)+P(B_2|A_3)P(A_3)=p_0\times\frac{2}{4}+(1-p_0)\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}p_0$

所以，随机选择一个选项得分的数学期望 $0\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}p_0\right)+2\times\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}p_0\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}p_0$.

………………8 分

方案二：随机选择两个选项；

$P(B_0)=P(B_0|A_2)P(A_2)+P(B_0|A_3)P(A_3)=p_0\times\left(1-\frac{C_2^2}{C_4^2}\right)+(1-p_0)\times\frac{C_3^1}{C_4^2}=\frac{5}{6}p_0+\frac{1}{2}(1-p_0)=\frac{1}{3}p_0+\frac{1}{2}$，

$P(B_2)=P(B_2|A_2)P(A_2)+P(B_2|A_3)P(A_3)=p_0\times 0+(1-p_0)\times\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2}(1-p_0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p_0$，

$P(B_5)=P(B_5|A_2)P(A_2)+P(B_5|A_3)P(A_3)=p_0\times\frac{1}{C_4^2}+(1-p_0)\times 0=\frac{1}{6}p_0$.

所以，随机选择两个选项得分的数学期望 $0\times\left(\frac{1}{3}p_0+\frac{1}{2}\right)+2\times\frac{1}{2}(1-p_0)+5\times\frac{1}{6}p_0=1-\frac{1}{6}p_0$.

………………10 分

因为 $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}p_0\right)-\left(1-\frac{1}{6}p_0\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}p_0>0$. 所以选择方案一. ………………12 分

21.（1）因为 $f'(x)=\dfrac{\ln x-(1-\frac{1}{x})}{(1-x)^2}$，所以 $f(\frac{1}{2})=-2\ln 2, f'(\frac{1}{2})=4-4\ln 2$

切线方程为：$y+2\ln 2=(4-4\ln 2)(x-\frac{1}{2})$，

函数 $f(x)$ 在点 $(\frac{1}{2},f(\frac{1}{2}))$ 处的切线方程为：$(4-4\ln 2)x-y-2=0$. ………………4 分

(2) 由于 $f(x)<0$ 恒成立，$a\le 0$ 时 $\forall x\in D, f(x)\ge g(x)$ 不可能成立；………………5 分

$\forall x\in D, f(x)\ge g(x)$ 可以等价变形为：$\begin{cases}\forall x\in(0,1), 2\ln\sqrt{x}\ge a(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})\\ \forall x\in(1,+\infty), 2\ln\sqrt{x}\le a(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})\end{cases}$ ………………7 分

令 $h(x)=2\ln x-a(x-\frac{1}{x}), x\in(0,+\infty), h(1)=0$，$h'(x)=\dfrac{-ax^2+2x-a}{x^2}$

当 $a\ge 1$ 时，$\Delta=4-4a^2\le 0$，$-ax^2+2x-a\le 0$ 恒成立，所以 $h(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递减，

此时 $\forall x\in D, f(x)\ge g(x)$ 恒成立；………………9 分

当 $0<a<1$ 时，$\Delta=4-4a^2>0$，$-ax^2+2x-a=0$ 的两实根分别为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，

且 $x_1+x_2=\frac{2}{a}, x_1x_2=1$，所以 $0<x_1<1<x_2$，因此 $h(x)$ 在 $x\in(x_1,x_2)$ 上单调递增，

$x\in(0,x_1),(x_2,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $x\in(x_1,1)$ 时，$h(x)<h(1)=0$，不合题意；……11 分

综上所述 a 的取值范围为：$a\ge 1$. ………………12 分

22. （1）由已知得 $c=\sqrt{5},a=2b,c^2=a^2+b^2$ 所以 $b^2=1,a^2=4$，

双曲线 E 的标准方程为：$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ ……4 分

（2）$A(-2,0)$，$B(2,0)$，设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，直线 l 的斜率一定存在设为 k

联立 $\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2-4y^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow (1-4k^2)x^2-8kx-8=0$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{8k}{1-4k^2}$，$x_1x_2=-\dfrac{8}{1-4k^2}$，$\Delta=32-64k^2>0\Rightarrow k^2<\dfrac{1}{2}$ 且 $k^2\ne\dfrac{1}{4}$， ……6 分

所以 $\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{\frac{y_1}{x_1+2}}{\frac{y_2}{x_2-2}}=\dfrac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}$，且 $\dfrac{x_1^2}{4}-y_1^2=1$，$\therefore \dfrac{y_1}{x_1-2}=\dfrac{x_1+2}{4y_1}$ 替换带入得：

$\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{(x_1-2)(x_2-2)}{4y_1y_2}=\dfrac{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}{4k^2x_1x_2+4k(x_1+x_2)+4}=\dfrac{4k^2+4k+1}{4k^2-1}$ ………………10 分

所以 $\dfrac{4k^2+4k+1}{4k^2-1}=-3$，解得：$k=\dfrac{1}{4}$ 或 $k=-\dfrac{1}{2}$，因为 $k^2<\dfrac{1}{2}$ 且 $k^2\ne\dfrac{1}{4}$，所以 $k=\dfrac{1}{4}$

所以直线 l 的方程为 $x-4y+4=0$. ………………12 分