

南京市 2021—2022 学年度第一学期期末学情调研试卷

高一数学

2022.01

注意事项:

1. 本试卷包括单项选择题(第 1 题~第 8 题)、多项选择题(第 9 题~第 12 题)、填空题(第 13 题~第 16 题)、解答题(第 17 题~第 22 题)四部分。本试卷满分为 150 分,考试时间为 120 分钟。
2. 答卷前,考生务必将自己的学校、姓名、考生号填涂在答题卡上指定的位置。
3. 作答选择题时,选出每小题的答案后,用 2B 铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
4. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上;如需改动,先划掉原来的答案,再写上新答案;不准使用铅笔和涂改液。

一、单项选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,请把答案填涂在答题卡相应位置上。

1. 已知 $M = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 若集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, 则 $M =$
- A. $\{2, 4\}$ B. $\{6, 8\}$ C. $\{1, 3, 5\}$ D. $\{1, 3, 6, 8\}$

【答案】C

【考点】集合的运算

【解析】由题意可知, $M = \{1, 3, 5\}$, 故答案选 C.

2. 命题“ $\forall x \geq 0, x^3 + x \geq 0$ ”的否定是

- A. $\forall x \geq 0, x^3 + x < 0$ B. $\forall x < 0, x^3 + x \geq 0$
- C. $\exists x \geq 0, x^3 + x < 0$ D. $\exists x \geq 0, x^3 + x \geq 0$

【答案】C

【考点】命题的否定

【解析】由题意可知, 命题“ $\forall x \geq 0, x^3 + x \geq 0$ ”的否定是“ $\exists x \geq 0, x^3 + x < 0$ ”, 故答案选 C.

3. 已知 $0 < x < 1$, 若 $a = \log_2 x$, $b = 2^x$, $c = x^2$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

【答案】B

【考点】大小比较

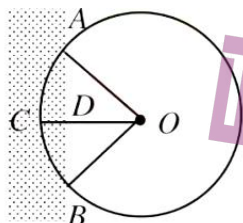
【解析】由题意可知, $a = \log_2 x < 0$, $b = 2^x > 2^0 = 1$, $c = x^2 \in (0, 1)$, 则 $a < c < b$, 故答案选 B.

4. 我国古代数学经典著作《九章算术》中记载了一个“圆材埋壁”的问题:“今有圆材埋

在壁中，不知大小，以锯锯之，深一寸，锯道长一尺，问径几何？”现有一类似问题，一不确定大小的圆柱形木材，部分埋在墙壁中，其截面如图所示．用锯去锯这木材，若锯口深

$CD=\sqrt{2}-1$ ，锯道 $AB=2$ ，则图中 $\widehat{ACB}$ 的长度为

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ C. π D. $\sqrt{2}\pi$



第 4 题图

【答案】B

【考点】新情景问题下的扇形的弧长求解

【解析】由题意可设 $OA=OC=r$ ，且 $AD=\frac{1}{2}AB=1$ ，则 $OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=\sqrt{r^2-1}$ ，又 $CD=OC-OD=r-\sqrt{r^2-1}=\sqrt{2}-1$ ，解得 $r=\sqrt{2}$ ，所以 $AD=OD=1$ ，则在 $\triangle AOD$ 中 $\angle AOD=\angle BOD=\frac{\pi}{4}$ ，所以 $\widehat{ACB}$ 的长度为 $\frac{\pi}{4} \times 2 \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ ，故答案选 B.

5. 要得到函数 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{5})$ 的图象，只需

- A. 将函数 $y=3\sin(x+\frac{\pi}{5})$ 图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍(纵坐标不变)
- B. 将函数 $y=3\sin(x+\frac{\pi}{10})$ 图象上所有点的横坐标变为原来 $\frac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变)
- C. 将函数 $y=3\sin 2x$ 图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位
- D. 将函数 $y=3\sin 2x$ 图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位

【答案】D

【考点】三角函数的图象变换

【解析】由题意可知，将函数 $y=3\sin 2x$ 图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位可得到 $y=3\sin 2(x+\frac{\pi}{10})=3\sin(2x+\frac{\pi}{5})$ ，故答案选 D.

6. 已知 $b, c \in \mathbf{R}$ ，关于 x 的不等式 $x^2+bx+c < 0$ 的解集为 $(-2, 1)$ ，则关于 x 的不等式 $cx^2+bx+1 > 0$ 的解集为

A. $(-\frac{1}{2}, 1)$

B. $(-1, \frac{1}{2})$

C. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$

D. $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

【答案】A

【考点】三个二次的关系及应用

【解析】由题意可知， $-2, 1$ 为方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根，则可得 $-2+1=-b$ ， $-2 \times 1=c$ ，解得 $b=1$ ， $c=-2$ ，所以不等式 $cx^2+bx+1>0$ 可化为 $-2x^2+x+1>0$ ，即 $2x^2-x-1<0$ ，解得 $-\frac{1}{2}<x<1$ ，故答案选 A.

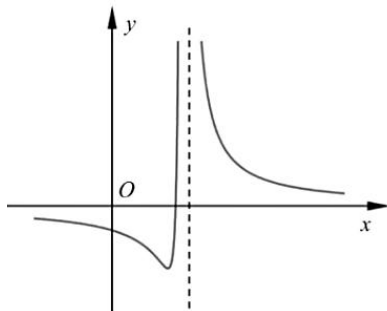
7. 函数 $f(x)=\frac{ax+b}{(x+c)^2}$ 的图象如图所示，则

A. $a<0, b<0, c<0$

B. $a>0, b<0, c>0$

C. $a>0, b>0, c<0$

D. $a>0, b<0, c<0$



第 7 题图

【答案】D

【考点】函数的图象识别与判断

【解析】由题意可知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -c) \cup (-c, +\infty)$ ，则可得 $-c>0$ ，即 $c<0$ ，则排除选项 B，又 $f(0)=\frac{b}{c^2}<0$ ，则 $b<0$ ，则排除选项 C，令 $f(x)=0$ ，则 $ax+b=0$ ，即 $ax=-b$ ，由图象可知 $x>0$ ，所以 $a>0$ ，则排除选项 A，选项 D 正确，故答案选 D.

8. 设函数 $f(x)=x(x^2-\cos\frac{x}{3}+2)$ ， $x \in (-3, 3)$ ，则不等式 $f(1+x)+f(2)<f(1-x)$ 的解集是

A. $(-2, -1)$

B. $(-2, 1)$

C. $(-1, 2)$

D. $(1, 2)$

【答案】A

【考点】函数的性质综合应用

【解析】法一：由题意可知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-3, 3)$ ，即关于原点对称，并且 $f(-x)=(-x)[(-x)^2-\cos\frac{(-x)}{3}+2]=-x(x^2-\cos\frac{x}{3}+2)=-f(x)$ ，则函数 $f(x)$ 为奇函数，当 $x \in [0, 3]$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，则当 $x \in [-3, 0]$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，所以令 $-3<1+x<3$ ，一

$3 < 1-x < 3$, 解得 $-2 < x < 2$, 则当 $x \in (0, 2)$ 时, $f(1+x)+f(2) > f(1+x) > f(1-x)$, 不符合题意; 当 $x \in (-2, 0)$ 时, 令 $g(x)=f(1+x)+f(2)-f(1-x)$, 则不等式可化为 $g(x) < 0$, 可知函数 $g(x)$ 在 $(-2, 0)$ 上单调递减, 且 $g(-1)=f(0)+f(2)-f(2)=0$, 所以 $g(x) < 0 = g(-1)$, 解得 $x < -1$, 则 $-2 < x < -1$, 即解集为 $(-2, -1)$, 故答案选 A.

法二: 由题意可知, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-3, 3)$, 即关于原点对称, 并且 $f(-x) = (-x)[(-x)^2 - \cos\frac{(-x)}{3} + 2] = -x(x^2 - \cos\frac{x}{3} + 2) = -f(x)$, 则函数 $f(x)$ 为奇函数, 又 $f(0)=0$, $f(2) > 0$, 可令 $x=0$, 不等式可化为 $f(1)+f(2) < f(1)$, 可知该不等式不成立, 则排除选项 B、C, 令 $x=\frac{3}{2}$, 则不等式可化为 $f(1+\frac{3}{2})+f(2) > f(1+\frac{3}{2})$, $f(1-\frac{3}{2})=f(-\frac{1}{2})=-f(\frac{1}{2})$, 且 $x > 0$ 时 $f(x) > 0$, 则 $f(1+\frac{3}{2})+f(2) > -f(\frac{1}{2})$, 不符合题意, 则排除选项 D, 故答案选 A.

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 请把答案填涂在答题卡相应位置上. 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 不选或有选错的得 0 分.

9. 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 且 $0 < x < y$, 则

- A. $\sin x < \sin y$ B. $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ C. $2^{x-y} < 1$ D. $\frac{x}{x+1} < \frac{y}{y+1}$

【答案】BCD

【考点】不等关系的判断

【解析】由题意可知, 对于选项 A, 可取 $x=\frac{\pi}{2}$, $y=\pi$, 则 $\sin\frac{\pi}{2} > \sin\pi$, 则选项 A 错误; 对于选项 B, 函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $0 < x < y$, 所以 $\sqrt{x} < \sqrt{y}$, 故选项 B 正确; 对于选项 C, 因为 $x < y$, 所以 $x-y < 0$, 所以 $2^{x-y} < 2^0 = 1$, 故选项 C 正确; 对于选项 D, 可设 $f(x)=\frac{x}{x+1}$, 因为 $0 < x < y$, 所以 $f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $\frac{x}{x+1} < \frac{y}{y+1}$, 故选项 D 正确; 综上, 答案选 BCD.

10. 已知函数 $y=f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, 对于任意 $x, y \in \mathbf{R}$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 则

- A. $f(x)$ 的图象经过坐标原点 B. $f(3x)=3f(x)$
C. $f(x)$ 单调递增 D. $f(-x)+f(x)=0$

【答案】ABD

【考点】抽象函数的性质应用

【解析】由题意可知, 对于选项 A, 令 $x=y=0$, 则 $f(0+0)=f(0)+f(0)$, 即 $f(0)=2f(0)$, 则 $f(0)=0$, 故选项 A 正确; 令 $y=x$, 则有 $f(x+x)=f(x)+f(x)$, 即 $f(2x)=2f(x)$, 再令 $y=2x$, 则

有 $f(x+2x)=f(x)+f(2x)$, 即 $f(3x)=f(x)+2f(x)=3f(x)$, 故选项 B 正确; 对于选项 C, 可设 $f(x)=-x$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 而函数 $f(x)=-x$ 单调递减, 故选项 C 错误; 对于选项 D, 令 $y=-x$, 则有 $f(x-x)=f(x)+f(-x)$, 即 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$, 故选项 D 正确; 综上, 答案选 ABD.

11. 已知函数 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$, 则

- A. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称
- B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称
- C. 若 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 则函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
- D. 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[k\pi+\frac{5\pi}{12}, k\pi+\frac{11\pi}{12}] (k \in \mathbb{Z})$

【答案】AD

【考点】三角函数的图象与性质综合应用

【解析】由题意可知, 对于选项 A, $f(\frac{\pi}{6})=2\sin(2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})=0$, 则选项 A 正确; 对于选项 B, $f(\frac{2\pi}{3})=2\sin(2 \times \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3})=0 \neq \pm 2$, 故选项 B 错误; 对于选项 C, 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$, 则 $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$, 所以 $2\sin(2x - \frac{\pi}{3}) \in [-\sqrt{3}, 2]$, 即 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$, 故选项 C 错误; 对于选项 D, 令 $2x - \frac{\pi}{3} \in [2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$, 解得 $x \in [2k\pi + \frac{5\pi}{12}, 2k\pi + \frac{11\pi}{12}] (k \in \mathbb{Z})$, 即为函数 $f(x)$ 的单调递减区间, 故选项 D 正确; 综上, 答案选 AD.

12. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbb{R}$ 的奇函数, 满足 $f(x+2)=-f(x)$, 且当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x)=2\sqrt{x}$, 则

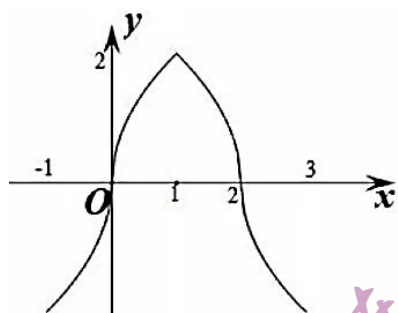
- A. $f(-3)=-2$
- B. 函数 $f(x)$ 是周期函数
- C. 不等式 $f(x)>0$ 的解集是 $\{x|4k < x < 4k+2, k \in \mathbb{Z}\}$
- D. 当关于 x 的方程 $f(x)=mx$ 恰有三个不同的解时, $m=2$

【答案】BC

【考点】函数的性质综合应用

【解析】由题意可知, $f(x+2)=-f(x)$, 所以 $f[(x+2)+2]=-f(x+2)=-[-f(x)]=f(x)$, 则函数 $f(x)$ 的周期为 4, 故选项 B 正确; 对于选项 A, $f(-3)=f(1)=2$, 故选项 A 错误; 对于选项 C, 当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x)=2\sqrt{x}$, 当 $x \in [-1, 0)$ 时, $f(x)=-f(-x)=-2\sqrt{-x}$, 因为 $f(x+2)=-f(x)$, $f(-x)=-f(x)$, $f(-x)=f(x+2)$, 则函数 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称, 所以当 $x \in (1, 2]$

时, $f(x)=f(-x+2)=2\sqrt{2-x}$, 当 $x\in(2, 3]$ 时, $f(x)=f(-x+2)=-2\sqrt{-(2-x)}=2\sqrt{x-2}$, 则可作出函数 $f(x)$ 在一个周期 $[-1, 3]$ 上的图象, 如图所示, 所以在一个周期 $[-1, 3]$ 时 $f(x) > 0$, 解得 $(0, 2)$, 所以在整个定义域上 $f(x) > 0$ 的解集是 $\{x|4k < x < 4k+2, k \in \mathbf{Z}\}$, 故选项 C 正确; 对于选项 D, 根据函数 $f(x)$ 的图象可知, 当 $m > 2$ 时, $f(x)=mx$ 也有三个不同的解, 故选项 D 错误; 综上, 答案选 BC.



三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 请把答案填写在答题卡相应位置上.

13. 已知角 θ 的终边经过点 $P(x, 1)(x > 0)$, 且 $\tan\theta = x$. 则 $\sin\theta$ 的值为 .

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【考点】 三角函数的定义

【解析】 由题意可知, $\tan\theta = \frac{1}{x} = x$, 因为 $x > 0$, 所以解得 $x = 1$, 所以 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. 著名数学家、物理学家牛顿曾提出: 物体在空气中冷却, 如果物体的初始温度为 $\theta_1^\circ\text{C}$, 空气温度为 $\theta_0^\circ\text{C}$, 则 t 分钟后物体的温度 θ (单位: $^\circ\text{C}$) 满足: $\theta = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0)e^{-kt}$, 若当空气温度为 30°C 时, 某物体的温度从 90°C 下降到 60°C 用时 14 分钟. 则再经过 28 分钟后, 该物体的温度为 $^\circ\text{C}$.

【答案】 37.5

【考点】 新情景问题下的指数运算

【解析】 由题意可知, $60 = 30 + (90 - 30)e^{-14k}$, 则 $e^{-14k} = \frac{1}{2}$, 再经过 28 分钟后, 物体的温度为 $\theta = 30 + (60 - 30)e^{-28k} = 30 + (60 - 30)(e^{-14k})^2 = 30 + 30 \times \frac{1}{2} = 37.5^\circ\text{C}$.

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -x+a, & -2 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \log_2 x, & \frac{1}{2} < x \leq 4. \end{cases}$ 若 $f(-1) = f(\frac{\sqrt{2}}{2})$, 则 $a =$. 若函数 $f(x)$ 有最小值, 且无最大值, 则实数 a 的取值范围是 .

【答案】 $-\frac{1}{2}; [-\frac{3}{2}, -1)$

【考点】双空题：分段函数的应用

【解析】由题意可知， $f(-1)=1+a$ ， $f(\frac{\sqrt{2}}{2})=\log_{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$ ，所以 $1+a=\frac{1}{2}$ ，解得 $a=-\frac{1}{2}$ ；当 $x \in [-2, \frac{1}{2})$ ，函数 $f(x) \in (a-\frac{1}{2}, 2+a]$ ，当 $x \in (\frac{1}{2}, 4]$ ，函数 $f(x) \in [-2, 1)$ ，若要函数 $f(x)$ 有最小值，且无最大值，则 $a-\frac{1}{2} \geq -2$ ，且 $2+a < 1$ ，解得 $-\frac{3}{2} \leq a < -1$ ，故实数 a 的取值范围是 $[-\frac{3}{2}, -1)$ 。

16. 已知正实数 x, y 满足 $3x^2+4xy+y^2=2$ ，则 $9x+5y$ 的最小值为 ▲ 。

【答案】 $4\sqrt{3}$

【考点】利用基本不等式求最值

【解析】由题意可知， $3x^2+4xy+y^2=(3x+y)(x+y)=2$ ，则 $9x+5y=2(3x+y)+3(x+y) \geq 2\sqrt{6(3x+y)(x+y)}=2\sqrt{12}=4\sqrt{3}$ ，当且仅当 $2(3x+y)=3(x+y)$ 时取等号，故 $9x+5y$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$ 。

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知集合 $M=\{x|x^2-12x+20<0, x \in \mathbf{R}\}$ ， $N=\{x||x-1|<m, x \in \mathbf{R}\}$ 。

(1) 当 $m=2$ 时，求 $M \cap N$ ；

(2) 在①充分条件，②必要条件 这两个条件中任选一个，补充在下面问题中。若问题中的 m 存在，求出 m 的取值范围；若问题中的 m 不存在，请说明理由。

问题：是否存在正实数 m ，使得“ $x \in M$ ”是“ $x \in N$ ”的 ▲ ？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

【考点】结构不良题：集合的运算、逻辑用语中条件的应用

【解析】

解： $M=\{x|x^2-12x+20<0, x \in \mathbf{R}\}=(2, 10)$ ，

当 $m \leq 0$ 时， $N=\emptyset$ ；当 $m > 0$ 时， $N=(1-m, 1+m)$ ，

(1) 当 $m=2$ 时， $N=(-1, 3)$ ，故 $M \cap N=(2, 3)$ 。

(2) 选择①充分条件, 则有 $M \subseteq N$, 则 $m > 0$, 且 $\begin{cases} 1-m \leq 2, \\ 1+m \geq 10, \end{cases}$ 解得 $m \geq 9$,

在正实数 m , 使得 “ $x \in M$ ” 是 “ $x \in N$ ” 的充分条件,

M 的取值范围为 $[9, +\infty)$.

选择②必要条件, 则有 $N \subseteq M$,

$m > 0$ 时, $\begin{cases} 1-m \geq 2, \\ 1+m \leq 10, \end{cases}$ 不成立,

所以不存在正实数 m , 使得 “ $x \in M$ ” 是 “ $x \in N$ ” 的必要条件.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\sin(\pi+x)\cos(\pi-x)}{\sin^2(\frac{\pi}{2}+x)}$,

(1) 求 $f(\frac{7\pi}{3})$ 值;

(2) 若 $f(\alpha) = 2$, 求 $\frac{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{1 + \cos^2\alpha}$ 的值.

【考点】三角函数的诱导公式、同角公式应用

【解析】

解: 函数 $f(x) = \frac{\sin(\pi+x)\cos(\pi-x)}{\sin^2(\frac{\pi}{2}+x)} = \frac{-\sin x(-\cos x)}{\cos^2 x} = \tan x$,

(1) $f(\frac{7\pi}{3}) = \tan \frac{7\pi}{3} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$,

(2) $f(\alpha) = \tan \alpha = 2$,

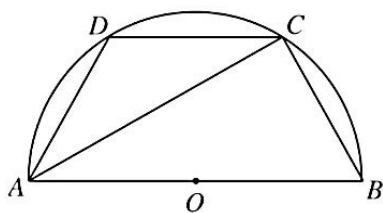
故 $\frac{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{1 + \cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha + \tan^2\alpha}{2 + \tan^2\alpha} = 1$.

19. (本小题满分 12 分)

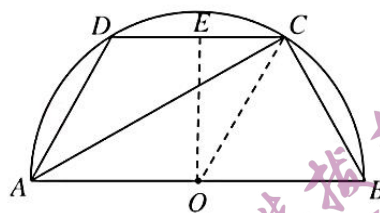
如图, 有一块半径为 1 的半圆形钢板, 计划裁剪成等腰梯形 $ABCD$ 的形状, 它的下底 AB 是半圆的直径, 上底 CD 的端点在圆周上. 记梯形 $ABCD$ 的周长为 y .

(1) 设 $\angle CAB = \theta$, 将 y 表示成 θ 的函数;

(2) 求梯形 $ABCD$ 周长的最大值.



第 19 题图



第 19 题图

【考点】三角函数的实际应用

【解析】

解：(1) 由 AB 是直径，得 $AC \perp BC$ ，所以 $AD = BC = AB \sin \angle CAB = 2 \sin \theta$ ，

过 O 做 $OE \perp CD$ 交 CD 于 E ，连接 CO ，则 $\angle COB = 2\theta$ ， $\angle EOC = \frac{\pi}{2} - 2\theta$ ，

所以 $CD = 2CE = 2OC \sin \angle EOC = 2 \cos 2\theta$ ，

所以 $y = 4 \sin \theta + 2 \cos 2\theta + 2 = -4 \sin^2 \theta + 4 \sin \theta + 4, \theta \in (0, \frac{\pi}{4})$.

(2) 设 $t = \sin \theta \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，则 $y = -4t^2 + 4t + 4$ ，对称轴 $t = \frac{1}{2} \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，

所以当 $t = \frac{1}{2}$ 时， y 有最大值 5.

20. (本小题满分 12 分)

已知 $1 < a < b < c$ ，且 $\log_a b + \log_b c = \frac{1}{2} + \log_a c$.

(1) 若 $c = a^3$ ，求 $\log_a b$ 的值；

(2) 求 $\log_a b + \log_b c$ 的最小值.

【考点】指对数运算、求最值

【解析】

解：(1) 由题意， $\log_a b + \log_b a^3 = \frac{1}{2} + \log_a a^3$ ，即 $\log_a b + \frac{3}{\log_a b} = \frac{7}{2}$ ，

解得 $\log_a b = \frac{3}{2}$ 或 2.

(2) 法 1：因为 $1 < a < b < c$ ，所以 $\log_a b > 1$ ， $\log_b c > 1$ ， $\log_a c > 1$ ，

所以 $\frac{1}{2} + \log_a c = \log_a b + \log_b c \geq 2\sqrt{\log_a b \cdot \log_b c}$ ，

因此 $\frac{1}{2} + \log_a c \geq 2\sqrt{\log_a c}$ ，即 $(\log_a c)^2 - 3\log_a c + \frac{1}{4} \geq 0$ ，

解得 $\log_a c \geq \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ 或 $\log_a c \leq \frac{3}{2} - \sqrt{2}$ ，

因为 $\log_a c > 1$ ，所以 $\log_a c \geq \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ ，

故 $\log_a b + \log_b c = \frac{1}{2} + \log_a c \geq 2 + \sqrt{2}$ ，

当 $\log_a b = \log_b c = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号，

所以 $\log_a b + \log_b c$ 的最小值为 $2 + \sqrt{2}$ 。

法 2：设 $\log_a b = x > 1$ ， $\log_b c = y > 1$ ，则 $x + y = \frac{1}{2} + xy$ ，

所以 $\frac{1}{2} = (x-1)(y-1) \leq \frac{(x-1+y-1)^2}{2}$ ，当且仅当 $x = y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取“=”，

所以 $x + y$ 最小值为 $2 + \sqrt{2}$ 。

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$ ， $g(x) = 2^{x+1} - 1$ 。

(1) 利用函数单调性的定义，证明：函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数；

(2) 若存在实数 $x_1, x_2 (0 < x_1 < x_2)$ ，使得函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的值域为 $[\frac{m}{g(x_2)}, \frac{m}{g(x_1)}]$ ，求实

数 m 的取值范围。

【考点】函数的性质综合应用

【解析】

解:(1) $f(x)=\frac{2^x+1}{2^x-1}=1+\frac{2}{2^x-1}$,

任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $2^{x_2} > 2^{x_1} > 1$,

则 $f(x_1) - f(x_2) = (1 + \frac{2}{2^{x_1}-1}) - (1 + \frac{2}{2^{x_2}-1}) = \frac{2(2^{x_2}-2^{x_1})}{(2^{x_1}-1)(2^{x_2}-1)} > 0$,

所以 $f(x_1) > f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

(2)由(1)知 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 所以当 $0 < x_1 < x_2$ 时, $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上

单调递减, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的值域为 $[f(x_2), f(x_1)] = [\frac{2^{x_2}+1}{2^{x_2}-1}, \frac{2^{x_1}+1}{2^{x_1}-1}]$,

所以 $\begin{cases} \frac{m}{2^{x_2}+1-1} = \frac{2^{x_2}+1}{2^{x_2}-1}, \\ \frac{m}{2^{x_1}+1-1} = 1 + \frac{2}{2^{x_1}-1}. \end{cases}$

所以 $\frac{m}{2^{x+1}-1} = 1 + \frac{2}{2^x-1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有 2 解,

所以 $(2 \cdot 2^x - 1)(2^x + 1) - m(2^x - 1) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有 2 解,

令 $t = 2^x - 1$, 则关于 t 的方程 $(2t+1)(t+2) - mt = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有 2 解,

即 $2t^2 + (5-m)t + 2 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有 2 解,

所以 $\begin{cases} 2 > 0, \\ \frac{m-5}{4} > 0, \\ \Delta = (m-5)^2 - 16 > 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m > 5, \\ m > 9 \text{ 或 } m < 1, \end{cases}$ 所以 $m > 9$.

所以 m 的取值范围为 $(9, +\infty)$.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^3 + 2x + 3a|x|$, $a \in \mathbf{R}$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性;

(2)设集合 $M = \{x | f(x+1) \geq f(x), x \in \mathbf{R}\}$, $N = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, 若 $N \subseteq M$, 求实数 a 的取值范围.

【考点】函数的奇偶性应用、解决含参的二次函数的最值问题

【解析】

解:(1) $a=0$ 时, $f(x)=x^3+2x$,

对 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(-x)=(-x)^3+2(-x)=-(x^3+2x)=-f(x)$,

所以 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数;

当 $a \neq 0$ 时, $f(1)=3+3a$, $f(-1)=-3+3a$,

$f(1) \neq f(-1)$, 且 $f(1) \neq -f(-1)$,

所以 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(2)因为 $N \subseteq M$, 所以 $\forall x \in [-1, 1], f(x+1) \geq f(x)$,

即 $(x+1)^3+2(x+1)+3a|x+1| \geq x^3+2x+3a|x|$,

化简得 $x^2+x+1+a|x+1| \geq a|x|$,

因为 $x \in [-1, 1]$, 所以 $|x+1| \geq 0$,

所以 $x^2+x+1+a(x+1) \geq a|x|$,

当 $x \in [0, 1]$ 时, $x^2+x+1+a \geq 0$, 所以 $(x^2+x+1+a)_{\min} = 1+a \geq 0$,

所以 $a \geq -1$;

当 $x \in [-1, 0]$ 时, $x^2+x+1+a(x+1) \geq -ax$,

即 $x^2+(2a+1)x+a+1 \geq 0$,

设 $g(x)=x^2+(2a+1)x+a+1$,

$g(-1)=-a+1 \geq 0$, 所以 $a \leq 1$,

$a \in [-1, 1]$ 时, $g(0)=a+1 \geq 0, g(-1) \geq 0$,

$g(x)=x^2+(2a+1)x+a+1$ 的对称轴方程为 $x=-\frac{2a+1}{2}$,

当 $-\frac{2a+1}{2} \leq -1$ 时, 即 $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ 时,

$y=x^2+(2a+1)x+a+1$ 在 $[-1, 0]$ 上单调递增,

所以 $g(x)_{\min}=g(-1) \geq 0$ 成立;

当 $-1 < -\frac{2a+1}{2} < 0$, 即 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ 时, $\Delta = (2a+1)^2 - 4(a+1) = 4a^2 - 3 < 0$ 成立,

所以 $x^2 + (2a+1)x + a+1 \geq 0$ 恒成立;

当 $-\frac{2a+1}{2} \geq 0$, 即 $-1 \leq a \leq -\frac{1}{2}$ 时,

$g(x) = x^2 + (2a+1)x + a+1$ 在 $[-1, 0]$ 上单调递减,

$g(x)_{\min} = g(0) = a+1 \geq 0$,

综上 a 的取值范围为 $[-1, 1]$.