# 2021年湖北省高考冲刺压轴卷

# 数 学 试 卷

2021.5

**本试题卷共6页,22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。**

**★祝考试顺利★**

**注意事项:**

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

**一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。**

1. 设集合 $A=\{x|x^2-16<0\}$, $B=\{x|x^2-5x-6\leqslant 0\}$,则 $A\cup B=$

A. $\{x|-1\leqslant x<4\}$　　B. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}$

C. $\{x|-4<x\leqslant 6\}$　　D. $\{x|-4\leqslant x\leqslant 6\}$

2. 复数 $\frac{2-i}{2+i}$ 的共轭复数是

A. $-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$　　B. $-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$　　C. $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$　　D. $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

3. 五一长假期间,6名同学到博物馆里面的书画、青铜、瓷器三个场馆做志愿者,每名同学只去1个场馆,则每个场馆恰好有2名志愿者的不同安排方法有

A. 270种　　B. 90种　　C. 45种　　D. 15种

4. 刘徽（约公元 225 年 - 295 年），魏晋时期伟大的数学家，中国古代数学理论的奠基人之一. 他在割圆术中提出的"割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣"，这可视为中国古代极限观念的重要阐释. 割圆术的核心思想是将一个圆的内接正 $n$ 边形等分成 $n$ 个等腰三角形，当 $n$ 变得很大时，这些等腰三角形的面积之和近似等于圆的面积. 运用割圆术的思想，得到 $\sin 1^\circ$ 的近似值为

A. $\frac{\pi}{90}$　　B. $\frac{\pi}{180}$　　C. $\frac{\pi}{270}$　　D. $\frac{\pi}{360}$

5. 一个大于 1 的自然数，除了 1 和它自身外，不能被其它正整数整除的数叫做素数. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果. 哥德巴赫猜想是"每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和"，如 $8=3+5$. 在不超过 20 的素数中，随机地取两个不同的数，其和等于 20 的概率是

A. $\frac{1}{7}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $\frac{1}{14}$　　D. $\frac{3}{28}$

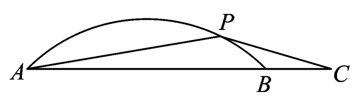
6. 自主研制大推力运载火箭是我国实现大国战略的重要工程. 2018 年 12 月 8 日，由长征三号乙型火箭发射的嫦娥四号探测器已完成探月任务. 这次发射所用火箭燃料质量约 2356 千克，火箭（除燃料部分）质量约 462000 千克，获得了 10.2km/s 的最大速度. 2020 年 7 月 23 日，使用除燃料外总重约为 880000 千克的火箭发射了天问一号火星探测器. 据了解，两次发射在不考虑空气阻力的条件下，火箭发射的最大速度 $v$（km/s）和燃料质量 $m$（千克），火箭（除燃料部分）质量 $M$（千克）的函数关系为 $v=2000\ln\left(t+\frac{m}{M}\right)$，其中 $t$ 为待定常量. 为使发射天问一号的火箭至少获得 12km/s 的最大速度，则该火箭大约需加注（　　）千克燃料.（参考数据及公式：$\frac{2356}{462000}\approx 0.00510$，$x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\approx x$）

A. 5280　　B. 5380　　C. 5480　　D. 5580

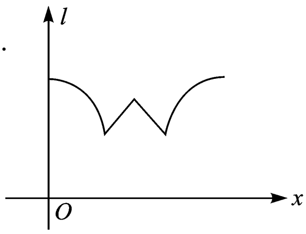
7. 如图，已知 $P$ 是半径为 3，圆心角为 $\frac{\pi}{2}$ 的一段圆弧 $AB$ 上一点，$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{BC}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最小值是

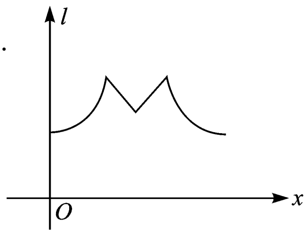
A. $-6$　　B. $6-9\sqrt{2}$

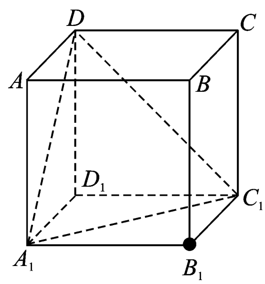
C. $-8$　　D. $6-6\sqrt{5}$

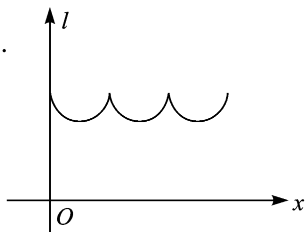


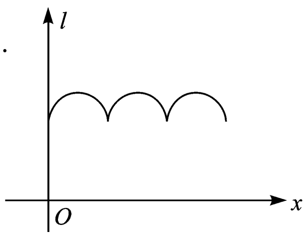
8. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，动点 $M$ 从 $B_1$ 点出发，在正方体表面沿逆时针方向运动一周后，再回到 $B_1$ 的运动过程中，点 $M$ 与平面 $A_1DC_1$ 的距离保持不变，运动的路程 $x$ 与 $l=MA_1+MC_1+MD$ 之间满足函数关系 $l=f(x)$，则此函数图象大致是

A.



B.



C.



D.



**二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。**

9. 已知 $a,b$ 为正实数，则下列结论正确的是

A. 若 $a<b$，则 $(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

B. 若 $a<b$，$m$ 为正实数，则 $\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}$

C. 若 $a\neq b$，则 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$

D. 若 $ab=a+b+3$，则 $ab$ 的取值范围是 $[9,+\infty)$

10. 设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F$，准线为 $l$，$A$ 为 $C$ 上一点，以 $F$ 为圆心，$|FA|$ 为半径的圆交 $l$ 于 $B$、$D$ 两点，若 $\angle ABD=90°$，且 $\triangle ABF$ 的面积为 $16\sqrt{3}$，则

A. 点 $D,F,A$ 三点共线

B. $\triangle ABF$ 是等边三角形

C. $|BF|=4$

D. 抛物线 $C$ 的方程为 $y^2=8x$

11. 某校数学兴趣小组的学生对函数 $f(x)=\dfrac{\sin nx}{\sin x}(n\in\mathbf{N}^*)$ 进行探究，得出如下四个结论，则正确的有

A. $f(x)$ 是周期函数

B. $f(x)$ 是奇函数

C. $n=3$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 有 2 个零点

D. $f(x)$ 的最大值为 $n$

12. 已知函数 $f(x)=a(x^2-1)-\ln x$，$a\in\mathbf{R}$，下列结论正确的是

A. 若 $f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=x-1$，则 $a=1$

B. $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\dfrac{1}{\sqrt{2a}})$

C. 若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内存在唯一极小值点，则 $0<a<\dfrac{1}{2}$

D. $a\geqslant 1$ 是 $f(x)>a\sin(x-1)+\dfrac{1}{x}-e^{1-x}$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立的必要条件

## 三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $(ax+1)^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的展开式中二项式系数和为 32，且各项系数和为 243，则 $a=$__________.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，$a_1=1$，$a_n-1=2S_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=$__________.

15. 已知三棱锥 $P-ABC$ 各项点均在球体 $O$ 的表面上，$PB$ 为球的直径，若 $AB=BC=2$，$\angle ABC=\dfrac{2\pi}{3}$，三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 4，则球 $O$ 的体积为__________.

16. 已知 $F_1,F_2$ 是双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左右焦点，$P$ 是双曲线右支上的一点，半径为 $\sqrt{3}$ 的圆与 $\triangle PF_1F_2$ 的边 $PF_2$，$F_1P$ 的延长线及 $F_1F_2$ 的延长线分别切于点 $E,F,D$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为__________.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(10 分)

从①$a_2=5$, $S_{n+1}-2S_n+S_{n-1}=3$ $(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*)$, ②$a_2=5$, $S_{n+1}=3S_n-2S_{n-1}-a_{n-1}$ $(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*)$, ③$\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}=\frac{3}{2}$ $(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*)$这三个条件中任选一个,补充在下面题目条件中,并解答.

已知数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$, $a_1=2$,且__________.

(1)求 $a_n$;

(2)已知 $b_n$ 是 $a_n$, $a_{n+1}$的等比中项,求数列$\{\frac{1}{b_n^2}\}$的前 $n$ 项和 $T_n$.

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

18.(12 分)

已知△$ABC$ 的内角 $A$, $B$, $C$ 的对边分别为 $a$, $b$, $c$, $a\sin A-c\sin C=(b-\frac{2}{3}c)\sin B$.

(1)求 $\sin A$;

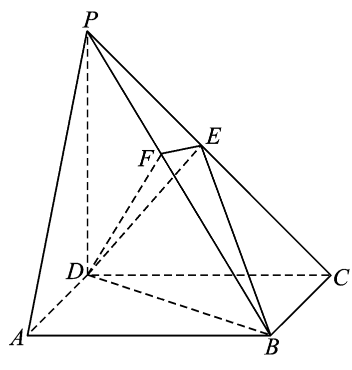
(2)若 $a=2$,求△$ABC$ 的面积的最大值.

19.(12 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是正方形,侧棱 $PD\perp$底面 $ABCD$, $PD=CD$, $E$ 是 $PC$ 的中点,过点 $E$ 作 $EF\perp PB$ 交 $PB$ 于点 $F$.

(1)求证:面 $EFD\perp$面 $BDF$;

(2)求二面角 $E-BD-C$ 的平面角的余弦值.

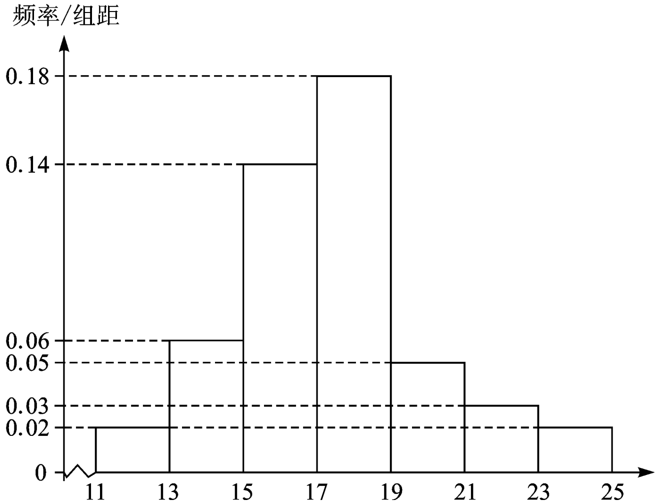



20.(12 分)

为检测某种抗病毒疫苗的免疫效果,某药物研究所科研人员随机选取 200 只小白鼠,并将该疫苗首次注射到这些小白鼠体内. 独立环境下试验一段时间后再检测这些小白鼠的某项医学指标值并制成如图所示的频率分布直方图.

(1)根据频率分布直方图,估计 200 只小白鼠该项医学指标平均值 $\bar{x}$(同一组数据用该组数据区间的中点值表示);

(2)试验数据表明,一般认为小白鼠的该项医学指标值 $X$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,且首次注射疫苗的小白鼠该项医学指标值不低于 14.77 时,就可以认为其体内已经产生抗体;进一步研究还发现,对第一次注射疫苗的 200 只小白鼠中没有产生抗体的那一部分群体进行第二次注射疫苗,约有 16 只小白鼠又产生了抗体. 这里,$\mu$ 近似为小白鼠医学指标平均值 $\bar{x}$,$\sigma^2$ 近似为样本方差 $s^2$. 经计算得,$s^2=6.92$. 求:




(ⅰ)估算一只小白鼠注射 2 次疫苗后产生抗体的概率 $p$(精确到 0.01);

(ⅱ)以(ⅰ)中的概率 $p$ 作为人体注射 2 次疫苗后产生抗体的概率,对 1000 名志愿者同样进行独立环境下的医学试验,问:这 1000 名志愿者注射 2 次疫苗后产生抗体的人数的期望值?

附:参考数据与公式 $\sqrt{6.92}\approx 2.63$,若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则①$P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.6827$,②$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=0.9545$,③$P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)=0.9973$.

21.(12 分)

设椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 $F_1,F_2$,过点 $F_1$ 且不垂直与 $x$ 轴的直线 $l$ 交椭圆 $E$ 于 $A,B$ 两点,若椭圆 $E$ 的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\triangle ABF_2$ 的周长为 $8\sqrt{2}$.

(1)求椭圆 $E$ 的方程;

(2)设直线 $AF_2,BF_2$ 与直线 $x=4$ 分别相交于点 $C,D$,设 $M,N$ 分别为线段 $AB$ 和 $CD$ 的中点,$O$ 为平面坐标系原点. 问:是否存在直线 $AB$ 的斜率 $k$,使得 $M,O,N$ 三点共线?若存在,求出 $k$ 的值;若不存在,请说明理由.

22.(12 分)

已知函数 $f(x)=\ln(1+x)+ax^2-x$,其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $a=\frac{1}{4}$,讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant 0$ 恒成立,求 $a$ 的取值范围.