沈阳二中2022-2023学年度下学期第三次模拟考试

高三（23届）数学试题

命题人：高三数学组　　审校人：　高三数学组

说明：1.测试时间：120分钟　　总分：150分

2.客观题涂在答题纸上，主观题答在答题纸的相应位置上

第Ⅰ卷　　（60分）

一、单项选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分）

1. 设集合 $A=\{x\in Z\,|\,x^2-x-2\leqslant 0\}$，$B=\{x\,|\,0<x<3\}$，$A\cap B=($　　$)$

A. $[1,2]$　　B. $(0,2]$　　C. $\{-1,0,1,2\}$　　D. $\{1,2\}$

2. 记 T_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积，已知 $\dfrac{1}{T_n}+\dfrac{1}{a_n}=1$，则 $T_4=($　　$)$

A. 4　　B. 5　　C. 7　　D. 8

3. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则“$\mu\geqslant 1$”是“$P(X<2)<\dfrac{1}{2}$”的(　　)

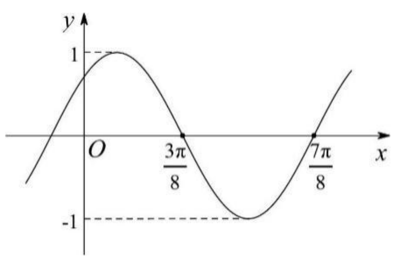
A. .必要不充分条件　B. 充分不必要条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+(b-4)x+1(a>0,b>0)$ 在 $x=1$ 处取得极值，则 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为 (　　)

A. $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3}$　　B. $3+2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. 9

5. 函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$(其中 $\omega>0$，$0<\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$) 的图象如图所示，为了得到

$y=\sin x$ 的图象，则需将 $y=f(x)$ 的图象(　　)



A. 横坐标缩短到原来的$\dfrac{1}{2}$，再向右平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位

B. 横坐标缩短到原来的$\dfrac{1}{2}$，再向右平移$\dfrac{\pi}{8}$个单位

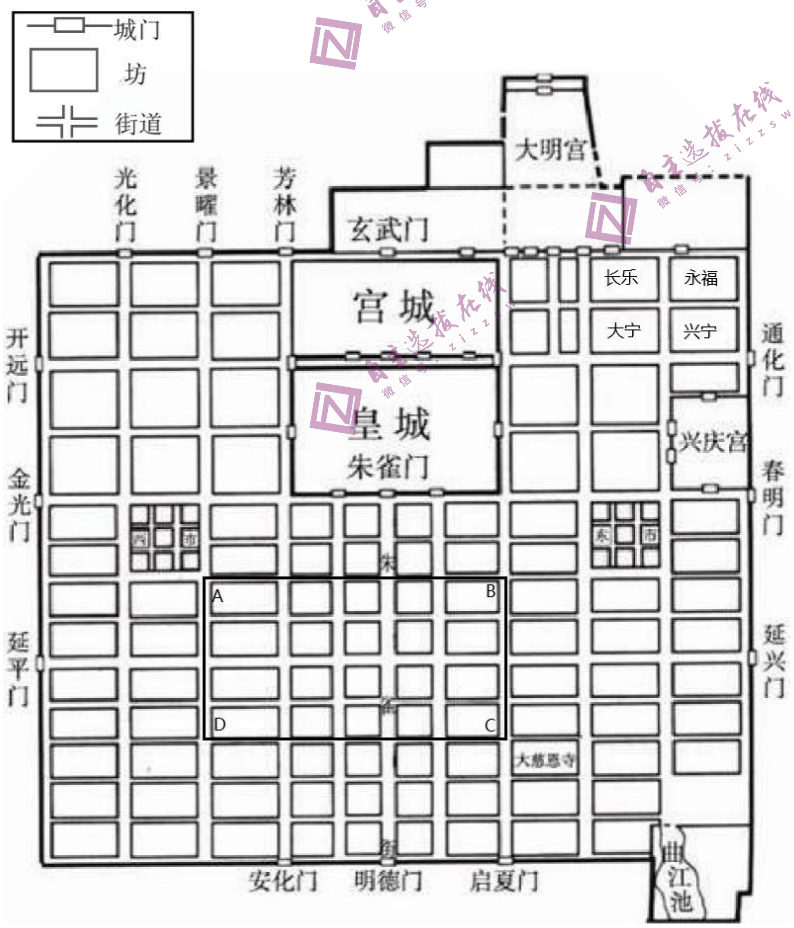
C. 横坐标伸长到原来的 2 倍，再向右平移$\dfrac{\pi}{8}$个单位

D. 横坐标伸长到原来的 2 倍，再向右平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位

6. 已知一个圆台的上、下底面半径之比为$1:2$，母线长为 4，其母线与底面所成的角为45°，则这个圆台的体积为(　　)

A. $\dfrac{112\sqrt{2}}{3}\pi$　　B. $\dfrac{80\sqrt{2}}{3}\pi$　　C. $\dfrac{56\sqrt{2}}{3}\pi$　　D. $\dfrac{40\sqrt{2}}{3}\pi$

7. 西安是世界四大古都之一，历史上先后有十多个王朝在西安建都．图为唐长安(西安古称)城示意图，城中南北向共有 9 条街道，东西向有 12 条街道，被称为“九衢十二条”，整齐的街道把唐长安城划分成了 108 坊，各坊有坊墙包围．下列说法错误的是(　)



A. 从延平门进城到安化门出城，最近的不同路线共有 15 条

B. 甲乙二人从安化门、明德门、启夏门这三个城门中随机选一城门进城，若二人选择互不影响，则二人从同一城门进城的概率为$\frac{1}{3}$

C. 用四种不同的颜色给长乐、永福、大宁、兴宁四坊染色(街道忽略)，要求有公共边的两个区域不能用同一种颜色，共有 60 种不同的染色方法

D. 若将街道看成直线，则图中矩形 $ABCD$ 区域中共有不同矩形 150 个

8. 已知抛物线 $C_1: y^2=4x$，圆 $C_2:(x-2)^2+y^2=2$，直线 $l: y=k(x-1)$ 与 C_1 交于 A，B 两点，与 C_2 交于 M，N 两点，若 $|AB|=8$，则 $|MN|=$(　　)

A. $\sqrt{14}$　　B. $\sqrt{6}$　　C. $\frac{\sqrt{14}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

二、多项选择题（本题共 4 小题，共 20 分，全选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

9. 已知复数 $z=\frac{2i}{1-i}$，则下列结论正确的是(　　)

A. z 在复平面对应的点位于第二象限　　B. z 的虚部是 i

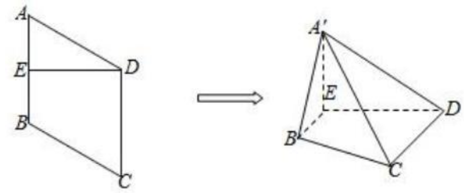
C. $|z|=\sqrt{2}$　　D. $\bar{z}=1+i$

10. 已知函数 $f(x)=x^3-x+1$，则(　　)

A. $f(x)$ 有两个极值点　　B. $f(x)$ 有三个零点

C. 点 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心　D. 直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

11. 如图，菱形 $ABCD$ 边长为 2，$\angle BAD=60^\circ$，E 为边 AB 的中点。将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起，使 A 到 A'，且平面 $A'DE\perp$ 平面 $BCDE$，连接 $A'B, A'C$。则下列结论中正确的是(　　) 全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》



A. $BD\perp A'C$

B. 四面体 $A'CDE$ 的外接球表面积为 8π

C. BC 与 $A'D$ 所成角的余弦值为 $\frac{3}{4}$

D. 直线 $A'B$ 与平面 $A'CD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$

12. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_i=1$或$a_i=2$的概率均为$\frac{1}{2}(i=1,2,3,\cdots,n)$.

设S_n能被3整除的概率为P_n，则(　　)

A. $P_2=1$　　B. $P_3=\frac{1}{4}$　　C. $P_{11}=\frac{341}{1024}$　　D. 当$n\geqslant 5$时，$P_n<\frac{1}{3}$

第Ⅱ卷　（90 分）

三、填空题（本题共 4 小题，每空 5 分，共 20 分）

13. 已知单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为60°，$k\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}$垂直，则k的值为__________.

14. 在$(2x^2+1)(x-\frac{2}{x})^5$的展开式中$x$的系数为_________.

15. 已知曲线$C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$，点$M$与曲线$C$的焦点不重合.已知$M$关于曲线$C$的焦点的对称点分别为$A,B$，线段$MN$的中点在曲线$C$右支上，则$|AN|-|BN|$的值为__________.

16. 已知函数$f(x)$满足$f(x-2)=f(x+2)$，$0\leqslant x<4$时，$f(x)=\sqrt{4-(x-2)^2}$，$g(x)=f(x)-k_nx(n\in N^*$，$k_n>0)$.若函数$g(x)$的图像与x轴恰好有$2n+1$个不同的交点，则$k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2=$__________.

四、解答题（共 70 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. （本小题满分 10 分）

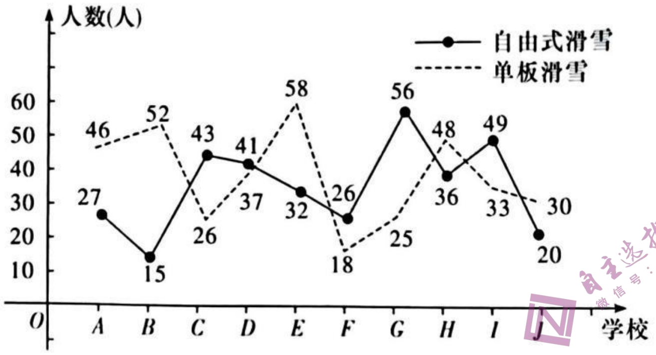
已知等差数列$\left\{a_n\right\},\left\{b_n\right\}$公差分别为$d_1,d_2,d_1-d_2=1,a_2-b_2=1$，$a_n+b_n=7n-1$.

(1) 求数列$\left\{a_n\right\},\left\{b_n\right\}$的通项公式$a_n,b_n$；

(2) 求$(1,100)$中既在数列$\left\{a_n\right\}$中，又在数列$\left\{b_n\right\}$中的所有数之和.

18. （本小题满分 12 分）

2022 年冬季奥林匹克运动会主办城市是北京，北京成为第一个举办过夏季奥林匹克运动会和冬季奥林匹克运动会以及亚洲运动会三项国际赛事的城市！为迎接冬奥会的到来，某地很多中小学开展了模拟冬奥会赛事的活动，为了深入了解学生在“自由式滑雪”和“单板滑雪”两项活动的参与情况，在该地随机选取了 10 所学校进行研究，得到如下数据：



(1) 在这 10 所学校中随机选取 3 所来调查研究，求这 3 所学校参与“自由式滑雪”都超过 40 人的概率；

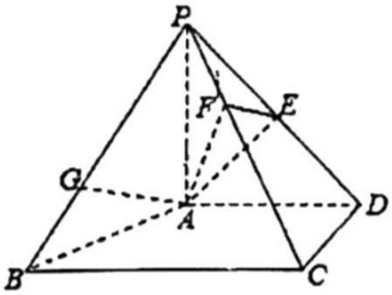
(2) “单板滑雪”参与人数超过 45 人的学校可以作为“基地学校”，现在从这 10 所学校中随机选出 3 所，记 X 为选出可作“基地学校”的学校个数，求 X 的分布列和数学期望；

(3) 现在有一个“单板滑雪”集训营，对“滑行、转弯、停止”这 3 个动作技巧进行集训，且在集训中进行了多轮测试．规定：在一轮测试中，这 3 个动作中至少有 2 个动作达到“优秀”，则该轮测试记为“优秀”．在集训测试中，小明同学 3 个动作中每个动作达到“优秀”的概率均为 $\frac{1}{3}$，每个动作互不影响且每轮测试互不影响．如果小明同学在集训测试中要想获得“优秀”的次数的平均值达到 5 次，那么理论上至少要进行多少轮测试？

19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 面 $ABCD$，$AD\perp CD$，$AD\,//\,BC$，

$PA=AD=CD=2$，$BC=3$.E 为 PD 的中点，点 F 在 PC 上，且 $\dfrac{PF}{PC}=\dfrac{1}{3}$.



(1) 求证：$CD\perp$ 面 PAD；

(2) 求二面角 $F-AE-P$ 的正弦值；

(3) 设点 G 在 PB 上，且 $\dfrac{PG}{PB}=\lambda$. 判断是否存在这样的 λ，使得 A，E，F，G 四点共面，

20. （本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，三个内角 A，B，C 的对应边分别为 a，b，c，$b^2-a^2=ac$.

(1) 证明：$B=2A$;

(2) 求 $\cos C+\cos A$ 的取值范围.

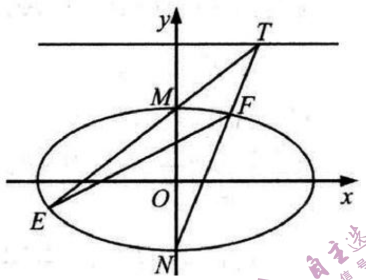
21. （本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，上顶点为 M，下顶点为 N，$MN=2$，设点 $T(t,2)(t\neq 0)$ 在直线 $y=2$ 上，过点 T 的直线 TM，TN 分别交椭圆 C 于点 E 和点 F.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 求证：直线 EF 恒过定点，并求出该定点;

(3) 若 $\triangle TMN$ 的面积为 $\triangle TEF$ 的面积的 k 倍，则当 t 为何值时，k 取得最大值?



22. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=k\ln(1+x)$，$g(x)=x$，$(k\in R)$.

(1) 讨论函数 $y=f(x)-g(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的最大值;

(2) 确定 k 的所有可能取值，使得存在 $t>0$，对任意的 $x\in(0,t)$，恒有

$|f(x)-g(x)|<kx^2$.