

TOP20 三月联考(全国 II 卷)

文科数学

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分.
2. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷相应的位置.
3. 全部答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
4. 本试卷满分 150 分,测试时间 120 分钟.
5. 考试范围:高考全部内容.

第 I 卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1) 设 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x - 1 \geq 0\}$, 则 $\complement_U A =$

- (A) $\{x | x \leq 1\}$ (B) $\{x | x < 1\}$ (C) $\{x | x \geq 1\}$ (D) $\{x | x > 1\}$

(2) $(1 - 2i)(2 + i) =$

- (A) $4 - 3i$ (B) $4 + 3i$ (C) $-4 - 3i$ (D) $-4 + 3i$

(3) 下列函数中为偶函数的是

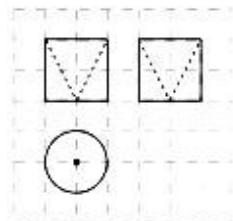
- (A) $y = |\ln x|$ (B) $y = x^2 - 2x$ (C) $y = \frac{2}{x}$ (D) $f(x) = 2^{1-x}$

(4) 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, F 为双曲线 C 的右焦点, 过点 F 作与渐近线垂直的直线与另一条渐近线交于点 M , 则 $|FM| =$

- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) 4

(5) 某几何体的三视图如图所示, 网格纸上小正方形的边长为 1, 则该几何体的体积为

- (A) $\frac{\pi}{3}$
(B) $\frac{2\pi}{3}$
(C) π
(D) $\frac{4\pi}{3}$



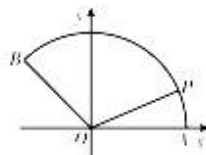
(6) 在边长为 4 的正方形的边上随机取一点, 则该点到正方形中心的距离小于 $\sqrt{5}$ 的概率是

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

(7) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 扇形 AOB 的圆心角为 $\frac{3\pi}{4}$, 半径为 1, P 是 \widehat{AB} 上

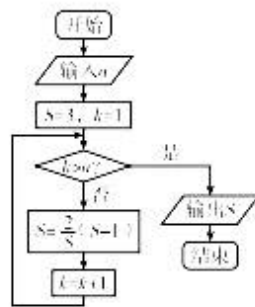
一点, 其横坐标为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 则 $\sin \angle BOP =$

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
(C) $\frac{4 + \sqrt{2}}{6}$ (D) $\frac{3 + \sqrt{2}}{6}$



(8) 执行如图所示的程序框图, 若输入 a 的值为 2019, 则输出 S 的值为

- (A) 3 (B) $\frac{4}{3}$
(C) $\frac{1}{2}$ (D) -2



(9) 设 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin\alpha\cos\beta = 3\sin\beta\cos\alpha$, 则 $\alpha - \beta$ 的最大值为

- (A) $\frac{\pi}{12}$ (B) $\frac{\pi}{6}$
(C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

(10) 设 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x+y \leq 2, \\ y \leq x+a, \text{ 且 } \frac{y}{x+4} \text{ 的最大值为 } \frac{1}{2}, \\ y \geq 0. \end{cases}$ 则实数 a 的值为

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(11) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 点 A, B 是椭圆 C 上关于原点 O 对称的两个点, 且

$|AO| = |AF|, \vec{FA} \cdot \vec{FB} = 0$, 则椭圆 C 的离心率为

- (A) $\sqrt{3}-1$ (B) $2-\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(12) 若函数 $f(x) = a \ln x - e^x$ 有极值点, 则实数 a 的取值范围是

- (A) $(-e, +\infty)$ (B) $(1, e)$ (C) $(1, +\infty)$ (D) $(0, +\infty)$

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13 题 ~ 第 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22 题 ~ 第 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分.

(13) 已知非零向量 $a = (2x, y), b = (1, -2)$, 且 $a \parallel b$, 则 $\frac{x}{y} =$ _____.

(14) 甲、乙、丙、丁 4 人站在一栋房子前, 甲说: “我没进过房子”; 乙说: “丙进去过”; 丙说: “丁进去过”; 丁说: “我没进过房子”. 这四人中只有一人进过房子, 且只有一人说了真话, 则进过这栋房子的人是 _____.

(15) 已知高为 $2\sqrt{3}$ 的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各个顶点都在同一球面上, 若 $AB = 2BC = 4, \angle ABC = 60^\circ$, 则球的体积为 _____.

(16) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b+c = a(\cos B + \cos C)$, 若 $\triangle ABC$ 的周长的最大值为 $4 + 4\sqrt{2}$, 则 $a =$ _____.

三、解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(17) (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{3}, \frac{a_n}{a_{n+1}} = 2a_n + 1 (n \in \mathbb{N}^* \text{ 且 } n \geq 2)$.

(I) 证明: $\{\frac{1}{a_n}\}$ 为等差数列;

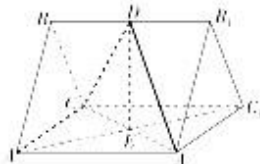
(II) 求数列 $\{\frac{3^n}{a_n}\}$ 的前 n 项和 T_n .

(18)(本小题满分12分)

如图,直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, $AA_1 = \sqrt{2}$,底面是边长为1的等边三角形, D 为 BB_1 的中点, AC_1 与 CA_1 交于点 E .

(I)证明: $DE \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$;

(II)求点 B 到平面 DCA_1 的距离.



(19)(本小题满分12分)

2019年第一期中国青年阅读指数数据显示,从阅读需求的角度,排名前三的阅读领域分别为文学、哲学及社会科学和历史.某学校从文科生和理科生中选取了经常阅读的学生进行了假期阅读内容和阅读时间方面的调查,得到以下数据:

学生所学文理与阅读内容列联表

	文学阅读人数	非文学阅读人数	调查人数
理科生	70	130	200
文科生	45	55	100
合计	115	185	300

男生	女生
4 0	3 0
5 5	4 0 2 5 5
	5 8
5 4 0	6
2 0	7 0 0 2 5 5
2	8 0 4 5 6 8
	9 5
	10 0
0 0	11

(I)判断能否有90%的把握认为学生所学文理与阅读内容有关?

(II)从阅读时间大于30分钟的被调查同学中,随机选取30名学生,其阅读时间(分钟)整理成如图所示的茎叶图,并绘制日均阅读时间分布表;

其中30名同学的日均阅读时间分布表(单位:分钟)

阅读时间	[30,60)	[60,90)	[90,120)
男生人数	4	y	2
女生人数	x	10	2

求出 x, y 的值,并根据日均时间分布表,估计这30名同学日阅读时间的平均值;

(III)从(II)中日均阅读时间高于90分钟的同学中随机选取2人介绍阅读体会,求这2人性别相同的概率.

参考公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

参考数据:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

(20)(本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: x^2 = 4y$, 直线 $l: y = kx + 1$ 与抛物线交于 A, B 两点.

(I) 若 $k = \frac{1}{2}$, 求以 AB 为直径的圆被 x 轴所截得的弦长;

(II) 分别过点 A, B 作抛物线 C 的切线, 两条切线交于点 E , 求 $\triangle EAB$ 面积的最小值.

(21)(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 \ln x$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 证明: $\frac{x^2}{e^x} < f(x) + \frac{3}{4}$.

请考生从第 22、23 题中任选一题作答, 并用 2B 铅笔将答题卡上所选题目对应的题号右侧方框涂黑, 按所选涂题号进行评分; 多涂、多答, 按所涂的首题进行评分; 不涂, 按本选考题的首题进行评分.

(22)(本小题满分 10 分)【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x = -2 + t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 $C_1: \rho = 2$ 与 x 轴的正、负半轴分别交于 A, B 两点.

(I) P 为 C_1 上的动点, 求线段 AP 中点的轨迹 C_2 的直角坐标方程;

(II) 直线 l 与 C_2 分别交于点 M, N , 且 M 在 N 的左侧, $\triangle BMO$ 的面积是 $\triangle NMO$ 面积的 2 倍, 求 $\tan \alpha$ 的值.

(23)(本小题满分 10 分)【选修 4-5: 不等式选讲】

已知函数 $f(x) = |x - a| - x^2$.

(I) 若 $a = 1$, 求不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集;

(II) 若不等式 $f(x) < 2(1 - x^2)$ 至少有一个负数解, 求实数 a 的取值范围.

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国强基计划、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国重点中学 2020 届高三上学期期末考试试题答案汇总（更新下载中），点击链接获得

<http://www.zizzs.com/c/202001/41635.html>