20230607 项目第三次模拟测试卷

理科数学 参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	B	B	A	B	D	B	C	C	C	D

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分.

13． -40　　14． $\dfrac{1}{2}$　　15． ②③④　　16． $3\times 2^{n+1}-3n-6$

三．解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤． 第 17 题-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22 题、23 题为选考题，考生根据要求作答．

17.【解析】(1) 在 ΔAPC 中，因为 $AP\perp CP$，且 $AP=PC$，所以 $\angle CAP=\dfrac{\pi}{4}$，

由 $AC=2$，可得 $AP=\sqrt{2}$，又 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\angle BAP=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}$，…………………… 2 分

在 ΔAPB 中，因为 $\angle APB=\dfrac{2\pi}{3}$，$\angle BAP=\dfrac{\pi}{12}$，所以 $\angle ABP=\pi-\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}$，

在 ΔAPB 中，由正弦定理 $\dfrac{AB}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\dfrac{\pi}{4}}$，解得 $AB=\sqrt{3}$，…………………… 5 分

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}$. …………………… 6 分

(2) 在 ΔABC 中，由余弦定理得 $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC$，

即 $7=AB^2+4-2\cdot AB\cdot 2\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}$，亦即 $AB^2-2AB-3=0$，

解得 $AB=3$（$AB=-1$ 舍去），…………………………………………………… 7 分

令 $\angle CAP=\alpha$（$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{3})$），则在 ΔAPC 中，$AP=2\cos\alpha$，

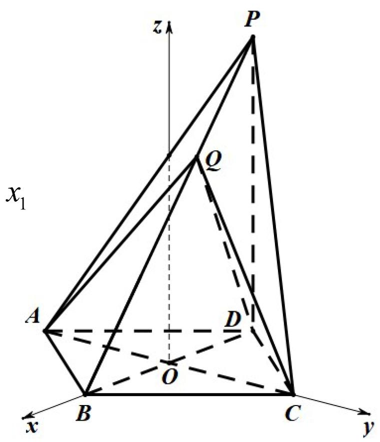
在 ΔAPB 中，$\angle BAP=\dfrac{\pi}{3}-\alpha$，所以 $\angle ABP=\pi-\dfrac{2\pi}{3}-(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)=\alpha$，…………………… 9 分

在 ΔAPB 中，由正弦定理得 $\dfrac{AB}{\sin\angle APB}=\dfrac{AP}{\sin\angle ABP}$，$\dfrac{3}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=\dfrac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}$，解得 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

因为 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{3})$，所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，则 $AP=2\cos\alpha=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. …………………… 12 分

18. 【解析】(1) 连接 BD 交 AC 与点 O，连接 PO，
因为 $PO\perp AC$，$BD\perp AC$，所以 $AC\perp$ 平面 PBD，
又 $QD\subseteq$ 平面 PBD，所以 $AC\perp QD$； …………………… 5 分

(2) 以点 O 为原点，以 OB 所在直线为 x 轴，OC 所在直线为 y 轴，以过点 O 垂直于平面 $ABCD$ 向上的方向为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，设 $OB=1$，



依据题意 $B(1,0,0)$，$D(-1,0,0)$，$P(-1,0,2\sqrt{2})$，

$A(0,-\sqrt{3},0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$ 设 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PB}$，

则 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PB}=(2\lambda,0,-2\sqrt{2}\lambda)$，则 $Q(2\lambda-1,0,2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda)$，…………………… 7 分

$\overrightarrow{DA}=(1,-\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{DC}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{DQ}=(2\lambda,0,2\sqrt{2}(1-\lambda))$，

设平面 AQD 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{n_1}=x_1-\sqrt{3}y_1=0\\ \overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{n_1}=2\lambda\cdot x_1+2\sqrt{2}(1-\lambda)\cdot z_1=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}y_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x_1\\ z_1=\dfrac{\lambda}{\sqrt{2}(1-\lambda)}\cdot x_1\end{cases}$

令 $x_1=\sqrt{6}(1-\lambda)$，则 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{6}(1-\lambda),\sqrt{2}(1-\lambda),\sqrt{3}\lambda)$，

设平面 CQD 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{n_2}=x_2+\sqrt{3}y_2=0\\ \overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{n_2}=2\lambda\cdot x_2+2\sqrt{2}(1-\lambda)\cdot z_2=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}y_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x_2\\ z_2=-\dfrac{\lambda}{\sqrt{2}(1-\lambda)}\cdot x_2\end{cases}$，

令 $x_2=\sqrt{6}(1-\lambda)$，则 $\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{6}(1-\lambda),-\sqrt{2}(1-\lambda),-\sqrt{3}\lambda)$，

因此 $\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{6(1-\lambda)^2-2(1-\lambda)^2+3\lambda^2}{6(1-\lambda)^2+2(1-\lambda)^2+3\lambda^2}=\dfrac{4(1-\lambda)^2+3\lambda^2}{8(1-\lambda)^2+3\lambda^2}=\dfrac{19}{35}$，

解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，即 $\dfrac{PQ}{PB}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{PQ}{QB}=\dfrac{1}{2}$. …………………… 12 分

19. 【解析】(1) 设事件 C 为"一天中王同学午餐和晚餐选择不同餐厅就餐"，
因为 30 天中王同学午餐和晚餐选择不同餐厅就餐的天数位 $6+12=18$（天），

所以 $P(C)=\dfrac{18}{30}=0.6$； …………………… 4 分

(2) 由题意知，王同学午餐和晚餐都选择 A 餐厅就餐的概率为 0.3，
王同学午餐和晚餐都选择 B 餐厅就餐的概率为 0.1，
张老师午餐和晚餐都选择 A 餐厅就餐的概率为 0.2，
张老师午餐和晚餐都选择 B 餐厅就餐的概率为 0.4，
记 X 为王同学、张老师在一天中就餐餐厅的个数，则 X 的所有可能取值为 $1,2$，
所以 $P(X=1)=0.3\times0.2+0.1\times0.4=0.1$，$P(X=2)=1-P(X=1)=1-0.1=0.9$，
所以 X 的分布列为

X	1	2
P	0.1	0.9

所以 $E(X)=1\times0.1+2\times0.9=1.9$； …………………… 8 分

（3）证明：由题意知 $P(N|M)>P(N|\bar{M})$，

即 $\frac{P(NM)}{P(M)}>\frac{P(N\bar{M})}{P(\bar{M})}=\frac{P(N)-P(NM)}{1-P(M)}$，即 $P(NM)>P(N)\cdot P(M)$，

即 $P(NM)-P(N)P(NM)>P(N)\cdot P(M)-P(N)P(NM)$，

即 $P(NM)\cdot P(\bar{N})>P(N)\cdot P(\bar{N}M)$，所以 $\frac{P(NM)}{P(N)}>\frac{P(\bar{N}M)}{P(\bar{N})}$，

即 $P(M|N)>P(M|\bar{N})$. ………………………………… 12分

20. 【解析】（1） $f'(x)=ae^x-1$，

若 $a\le 0$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在R单调递减，

若 $a>0$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-\ln a$， ………………………………… 3分

当 $x<-\ln a$ 时，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 单调递减，

当 $x>-\ln a$ 时，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 单调递增，

综上：当 $a\le 0$，$f(x)$ 在R单调递减，

若 $a>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 单调递增. ………………… 5分

（2）由（1）可知当 $0<a<1$ 时，$-\ln a>0$，

且 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 单调递增，

因为 $f(0)=0$，所以 $f(\ln a)<0$， ………………………………… 7分

因为 $f(-2\ln a)=\frac{1}{a}+2\ln a-a$，设 $h(x)=\frac{1}{x}+2\ln x-x$（$0<x\le 1$），

设 $h'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-1=-(\frac{1}{x}-1)^2\le 0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

所以 $h(x)>h(1)=0$，即 $f(-2\ln a)>0$， ………………………………… 10分

由零点的存在性定理可知 $\exists x_0\in(-\ln a,-2\ln a)$，使得 $f(x_0)=0$，

取 $b=x_0$，则 $ae^b=a+b$，且 $2\ln a+b<0$. ………………………………… 12分

21. 【解析】（1）设椭圆 C 的焦距为 $2c$，则 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，

设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

当 $l\perp x$ 轴时，l 的方程为 $x=-c$，代入椭圆方程得 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，解得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$，

所以 $S_{\triangle ABF_2}=\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot\frac{2b^2}{a}=\frac{2c}{a}\cdot b^2=b^2=3$，即 $b^2=3$，则 $a=2$，$c=1$，

所以椭圆 C 的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$； ………………………………… 5分

（2）由椭圆的对称性可知，若存在满足题意的定圆 E，则定圆 E 的圆心 E 一定在 x 轴上，

设 $E(x_0,0)$，定圆 E 的半径为 r，

当 l 与 x 轴重合时，以 AB 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=4$，

当 $l\perp x$ 轴时，以 AB 为直径的圆的方程为 $(x+1)^2+y^2=\frac{9}{4}$，

依题意 $\begin{cases}|x_0+1|=|\frac{3}{2}-r|\\|x_0|=|2-r|\end{cases}$，解得 $\begin{cases}r=\frac{5}{4}\\x_0=-\frac{3}{4}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}r=\frac{9}{4}\\x_0=-\frac{1}{4}\end{cases}$，

则圆 E 的方程为 $(x+\frac{3}{4})^2+y^2=\frac{25}{16}$ 或 $(x+\frac{1}{4})^2+y^2=\frac{81}{16}$，

以下证明圆 $E_1:(x+\frac{3}{4})^2+y^2=\frac{25}{16}$ 和圆 $E_2:(x+\frac{1}{4})^2+y^2=\frac{81}{16}$ 都符合要求，

设直线 $l:x=my-1$，与椭圆的方程联立得 $\begin{cases}x=my-1\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，

整理得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，则 $y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$，

设 AB 的中点为 D，则 $D(\frac{-4}{3m^2+4},\frac{3m}{3m^2+4})$，

$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(\frac{6m}{3m^2+4})^2+4\cdot\frac{9}{3m^2+4}}=\frac{12(m^2+1)}{3m^2+4}$， ………………………………… 9分

则 $\frac{|AB|}{2}=\frac{6(m^2+1)}{3m^2+4}$，因为 $E_1(-\frac{3}{4},0)$，

所以 $|DE_1|=\sqrt{(\frac{-4}{3m^2+4}+\frac{3}{4})^2+(\frac{3m}{3m^2+4})^2}=\frac{\frac{9}{4}m^2+1}{3m^2+4}$，

所以 $\frac{|AB|}{2}-|DE_1|=\frac{6(m^2+1)}{3m^2+4}-\frac{\frac{9}{4}m^2+1}{3m^2+4}=\frac{\frac{15}{4}m^2+5}{3m^2+4}=\frac{5}{4}$，

即 $|DE_1|=\frac{|AB|}{2}-r$，所以圆 $E_1:(x+\frac{3}{4})^2+y^2=\frac{25}{16}$ 与以 AB 为直径的圆内切，

因为 $E_2(-\frac{1}{4},0)$，所以 $|DE_2|=\sqrt{(\frac{-4}{3m^2+4}+\frac{1}{4})^2+(\frac{3m}{3m^2+4})^2}=\frac{\frac{3}{4}m^2+3}{3m^2+4}$，

所以 $\frac{|AB|}{2}+|DE_2|=\frac{6(m^2+1)}{3m^2+4}-\frac{\frac{3}{4}m^2+3}{3m^2+4}=\frac{\frac{27}{4}m^2+9}{3m^2+4}=\frac{9}{4}$，

即 $|DE_2|=r-\frac{|AB|}{2}$，所以圆 $E_2:(x+\frac{1}{4})^2+y^2=\frac{81}{16}$ 与以 AB 为直径的圆内切，

综上所述，存在满足条件的定圆，方程为 $(x+\frac{3}{4})^2+y^2=\frac{25}{16}$ 和 $(x+\frac{1}{4})^2+y^2=\frac{81}{16}$.

………………………………… 12分

22. 【解析】（1）因为直线l的参数方程为$\begin{cases} x=4-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=4+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$为参数），

所以直线l的普通方程为$x+y-8=0$， ………………………………… 2 分

又曲线C的极坐标方程为$\rho=8\sin\theta$，即$\rho^2=8\rho\sin\theta$，

所以曲线C的普通方程为$x^2+y^2=8y$，即$x^2+(y-4)^2=16$，

又因为点A在曲线C上，且圆心C到直线l的距离为$d=\dfrac{|4-8|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

所以点A到直线l距离的最大值为$2\sqrt{2}+4$. ………………………………… 5 分

（2）联立直线l与曲线C的方程$\begin{cases} x+y-8=0 \\ x^2+y^2=8y \end{cases}$，得$x^2-4x=0$，解得$x=0$或$x=4$，

因为点B在第一象限，所以$B(4,4)$，则点B的极坐标为$(4\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4})$，

因为$\angle AOB=\dfrac{7\pi}{12}$，则可设点$A$的极坐标为$(\rho,\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{7\pi}{12})$， ………………………………… 7 分

又因为点A在曲线C上，所以$|OA|=\rho=8\sin(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{7\pi}{12})=8\sin\dfrac{5\pi}{6}=4$，

所以$S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\angle AOB=\dfrac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2}\times\sin\dfrac{7\pi}{12}$

$=8\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=4+4\sqrt{3}$. ………………………………… 10 分

23. （10 分）**选修 4-5：不等式选讲**

【解析】（1）当$a=2$时，$f(x)=|x-2|+|x+4|$，

当 $x\le-4$时，$f(x)=2-x-x-4=-2x-2\ge7$，解得$x\le-\dfrac{9}{2}$，即$x\le-\dfrac{9}{2}$；

当 $-4<x<2$时，$f(x)=2-x+x+4=6\ge7$，无解；

当 $x\ge2$时，$f(x)=x-2+x+4=2x+2\ge7$，解得$x\ge\dfrac{5}{2}$，；

综上：$x\in(-\infty,-\dfrac{9}{2}]\cup[\dfrac{5}{2},+\infty)$； ………………………………… 5 分

（2）由题意知$f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$，

因为$f(x)=|x-a|+|x+3a-2|\ge|x-a-x-3a+2|=|4a-2|$，即$f(x)_{\min}=|4a-2|$，

又$g(x)=-x^2+2ax+1=-(x-a)^2+a^2+1\le a^2+1$，即$g(x)_{\max}=a^2+1$，

所以$|4a-2|>a^2+1$，即$4a-2>a^2+1$或$2-4a>a^2+1$，

解得$1<a<3$或$-2-\sqrt{5}<a<-2+\sqrt{5}$. ………………………………… 10 分