

英才大联考长郡中学 2023 届高三三月考试卷(三)

数 学

得分: _____

本试卷共 8 页。时量 120 分钟。满分 150 分。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 记集合 $M = \{x | x^2 > 4\}$, $N = \{x | x^2 - 4x \leq 0\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $\{x | 2 < x \leq 4\}$ B. $\{x | x \geq 0 \text{ 或 } x < -2\}$
C. $\{x | 0 \leq x < 2\}$ D. $\{x | -2 < x \leq 4\}$

★2. 已知 $f(x), g(x)$ 分别是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数和奇函数, 且 $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 + 1$, 则 $f(1) + g(1) =$

- A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

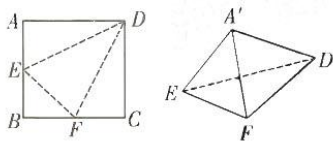
★3. 已知向量 $a = (-1, 2)$, 点 $A(-2, 1)$, 若 $\overrightarrow{AB} \parallel a$ 且 $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{5}$, O 为坐标原点, 则 \overrightarrow{OB} 的坐标为

- A. $(1, -5)$ B. $(-5, 7)$
C. $(1, -5)$ 或 $(5, -7)$ D. $(1, -5)$ 或 $(-5, 7)$

4. 已知平面 α , 直线 l, m , 若 $m \subset \alpha$, 则“ $l \parallel m$ ”是“ $l \parallel \alpha$ ”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

★5. 如图, 边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别是边 AB, BC 的中点, 将 $\triangle AED, \triangle EBF, \triangle FCD$ 分别沿 DE, EF, FD 折起, 使 A, B, C 三点重合于点 A' , 若四面体 $A'EFD$ 的四个顶点在同一个球面上, 则该球的半径为



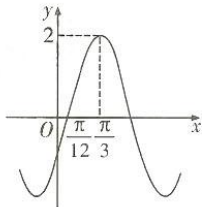
- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{11}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

6. 设 $a = \sin 7$, 则

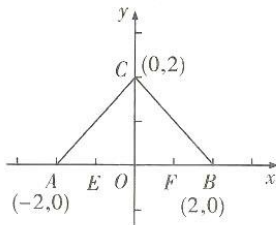
- A. $a^2 < 2^a < \log_2 |a|$ B. $\log_2 |a| < 2^a < a^2$
C. $a^2 < \log_2 |a| < 2^a$ D. $\log_2 |a| < a^2 < 2^a$

7. 将函数 $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, -\pi < \varphi < 0$) 的图象上所有点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到如图所示的函数 $y = g(x)$ 的图象, 则

$$f(0) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$



- A. 0 B. 1 C. 2 D. -1
8. 已知: $A(-2,0), B(2,0), C(0,2), E(-1,0), F(1,0)$, 一束光线从 F 点出发射到 BC 上的 D 点经 BC 反射后, 再经 AC 反射, 落到线段 AE 上 (不含端点). 则 FD 斜率的取值范围是



- A. $(-\infty, -2)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(4, +\infty)$
- 二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

- ★9. 已知 a, b, c 为非零实数, 且 $a - b \geq 0$, 则下列结论正确的有

- A. $a + c \geq b + c$ B. $-a \leq -b$
C. $a^2 \geq b^2$ D. $\frac{1}{ab^2} \geq \frac{1}{ba^2}$

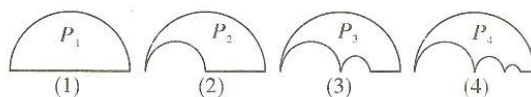
- ★10. 设 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = -\sqrt{3}\sin \omega x + \cos \omega x$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上有零点,

则 ω 的值可以是

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

11. 如图, P_1 是一块半径为 1 的圆形纸板, 在 P_1 的左下端剪去一个半径为 $\frac{1}{2}$ 的半圆后得到图形 P_2 , 然后依次剪去一个更小的半圆 (其直径为前一个剪掉半圆的半径) 得图形 $P_3, P_4, \dots, P_n, \dots$, 记纸板 P_n 的周长为 L_n , 面积为 S_n , 则下列说法正确的是

数学试题(长郡版) 第 2 页(共 8 页)



A. $L_3 = \frac{7}{4}\pi + \frac{1}{2}$

B. $S_3 = \frac{11}{32}\pi$

C. $L_n = \pi \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

D. $S_{n+1} = S_n - \frac{\pi}{2^{2n+1}}$

12. 已知 $a > b, c > d, \frac{e^a}{a+1} = \frac{e^b}{b+1} = 1.01, (1-c)e^c = (1-d)e^d = 0.99$, 则

A. $a+b > 0$

B. $c+d > 0$

C. $a+d > 0$

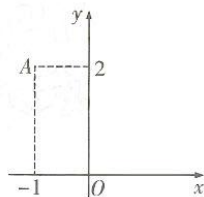
D. $b+c > 0$

选择题答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	得分
答案													

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

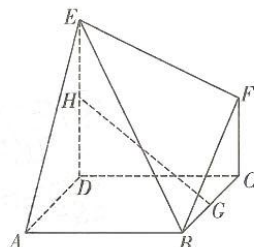
★13. 已知 i 是虚数单位, 如图, 在复平面内, 点 A 对应的复数为 z_1 , 若 $\frac{z_2}{z_1} = i$, 则 $z_2 =$ _____.



★14. 已知等边三角形 ABC 的边长为 6, 点 P 满足 $3\vec{PA} + 2\vec{PB} + \vec{PC} = \mathbf{0}$, 则 $|\vec{PA}| =$ _____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = (-1)^n a_n + \frac{1}{2^n} + n - 3$ 且 $(a_{n+1} - p)(a_n - p) < 0$ 恒成立, 则实数 p 的取值范围是 _____.

16. 如图, 多面体 $ABCDEF$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $CF \parallel DE$, 且 $AB = DE = 2, CF = 1, G$ 为棱 BC 的中点, H 为棱 DE 上的动点, 有下列结论:



- ①当 H 为 DE 的中点时, $GH \parallel$ 平面 ABE ;
- ②存在点 H , 使得 $GH \perp AE$;
- ③三棱锥 $B-GHF$ 的体积为定值;
- ④三棱锥 $E-BCF$ 的外接球的表面积为 14π .

其中正确的结论序号为 _____. (填写所有正确结论的序号)

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

★17. (10 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 前三项的和为 -9 , 前三项的积为 -15 .

- (1) 求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若 $\{a_n\}$ 为递增数列, 求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 其外接圆的半径为 $\sqrt{3}$, 且满足 $4\sqrt{3} \sin B \cos C = 2a - c$.

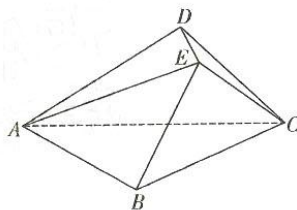
- (1) 求角 B ;
- (2) 若 AC 边上的中线长为 $\frac{5}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (12分)2022年9月28日晚,中国女排在世锦赛小组赛第三轮比赛中,又一次以3:0的比分酣畅淋漓地战胜了老对手日本女排,冲上了热搜榜第八位,令国人振奋!同学们,你们知道排球比赛的规则和积分制吗?其规则是:每场比赛采用“5局3胜制”(即有一支球队先胜3局即获胜,比赛结束).比赛排名采用积分制,积分规则如下:比赛中,以3:0或3:1取胜的球队积3分,负队积0分;以3:2取胜的球队积2分,负队积1分.已知甲、乙两队比赛,甲队每局获胜的概率为 $\frac{2}{3}$.

(1)如果甲、乙两队比赛1场,求甲队的积分 X 的概率分布列和数学期望;

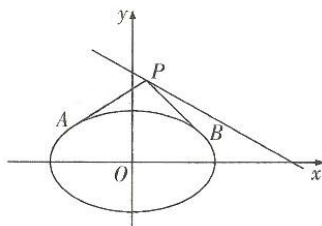
(2)如果甲、乙两队约定比赛2场,求两队积分相等的概率.

20. (12分)如图,在几何体 $ABCDE$ 中,底面 ABC 是以 AC 为斜边的等腰直角三角形. 已知平面 $ABC \perp$ 平面 ACD , 平面 $ABC \perp$ 平面 BCE , $DE \parallel$ 平面 ABC , $AD \perp DE$.



- (1) 证明: $DE \perp$ 平面 ACD ;
 (2) 若 $AC=2CD=2$, 设 M 为棱 BE 的中点, 求当几何体 $ABCDE$ 的体积取最大值时 AM 与 CD 所成角的正切值.

21. (12分) 如图所示, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 与直线 $l: \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$. 点 P 在直线 l 上, 由点 P 引椭圆 C 的两条切线 PA, PB , 点 A, B 为切点, O 是坐标原点.



- (1) 若点 P 为直线 l 与 y 轴的交点, 求 $\triangle PAB$ 的面积 S ;
 (2) 若 $OD \perp AB, D$ 为垂足, 求证: 存在定点 Q , 使得 $|DQ|$ 为定值.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = xe^{nx} - nx$ ($n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geq 2$) 的图象与 x 轴交于 P, Q 两点, 且点 P 在点 Q 的左侧.

(1) 求点 P 处的切线方程 $y = g(x)$, 并证明: $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$.

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) = t$ (t 为实数) 有两个正实根 x_1, x_2 , 证明:

$$|x_1 - x_2| < \frac{2t}{n \ln n} + \frac{\ln n}{n}.$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线