高三数学参考答案及评分标准

2022.3

一、单项选择题(每小题5分,共40分)

1－4 CABB　5－8 ABCD

二、多项选择题(每小题5分,选对但不全的得2分,共20分)

9. BCD　10. ABC　11. ABD　12. BCD

三、填空题(每小题5分,共20分)

13. $y=-2$　14. 7　15. 84　16. $(-\frac{2}{5},-\frac{2}{9})\cup(\frac{2}{9},\frac{2}{5})$

四、解答题(本大题共6小题,共70分)

17. 解:设数列$\{a_n\}$的公比为q,由$a_1=2,S_3=a_3+6$,

得$a_1(1+q+q^2)=6+q^2a_1$, ……… 2分

解得$q=2$, ……… 4分

所以$a_n=2^n$; ……… 5分

(2)$b_n=\log_2 a_n=n$, ……… 6分

所以$a_nb_n=n\cdot 2^n$,

$T_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$,

$2T_n=1\times2^2+2\times2^3+\cdots+(n-1)2^n+n\cdot2^{n+1}$, ……… 7分

所以$-T_n=2+2^2+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}$

$=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot2^{n+1}$

$=2^{n+1}-2-n\cdot2^{n+1}$, ……… 9分

所以$T_n=(n-1)2^{n+1}+2$. ……… 10分

18. 解:选条件①:

(1)$a=\sqrt{7}$,

由余弦定理$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$, ……… 3分

整理得$b^2+b-6=0$,因$b>0$,

解得$b=2,c=3$. ……… 6分

(2)因AD是$\triangle ABC$的角平分线,所以$\angle BAD=30°$,

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{7+9-4}{2\times\sqrt{7}\times3}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$,$\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\sqrt{1-\frac{4}{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$, ……… 8分

则$\sin\angle ADB=\sin(B+30°)=\frac{\sqrt{21}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{7}}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$, ……… 10分

由正弦定理$\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$,$AD=\frac{AB\sin B}{\sin\angle ADB}=\frac{3\times\frac{\sqrt{21}}{7}}{\frac{5\sqrt{7}}{14}}=\frac{6\sqrt{3}}{5}$. ……… 12分

选条件②:

(1)AC边上的高为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

由三角形的面积公式$\frac{1}{2}b(b+1)\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{4}b$, ……… 3分

解得$b=2,c=3$. ……… 6分

(2)因AD是$\triangle ABC$的角平分线,所以$\angle BAD=30°$,

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{7+9-4}{2\times\sqrt{7}\times 3}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\dfrac{4}{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，…… 8 分

则 $\sin\angle ADB=\sin(B+30^\circ)=\dfrac{\sqrt{21}}{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，…………………… 10 分

由正弦定理$\dfrac{AD}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，$AD=\dfrac{AB\sin B}{\sin\angle ADB}=\dfrac{3\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}}{\dfrac{5\sqrt{7}}{14}}=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$. ………………… 12 分

选条件③：

(1) $\sin B=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

由题意可知 $B<C$，所以 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-\dfrac{3}{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

因为 $A+B+C=\pi$，

$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{7}}{7}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$，…… 3 分

由正弦定理$\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{b}{c}$，$\dfrac{\dfrac{\sqrt{21}}{7}}{\dfrac{3\sqrt{21}}{14}}=\dfrac{b}{b+1}$，解得 $b=2$，$c=3$. ………………………… 6 分

(2) 因 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，所以 $\angle BAD=30^\circ$，

则 $\sin\angle ADB=\sin(B+30^\circ)=\dfrac{\sqrt{21}}{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，…………………… 8 分

由正弦定理$\dfrac{AD}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，$AD=\dfrac{AB\sin B}{\sin\angle ADB}=\dfrac{3\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}}{\dfrac{5\sqrt{7}}{14}}=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$. ………………… 12 分

19. 解：(1) 记乙闯关成功为事件 A，

所以 $P(A)=C_3^2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\cdot\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{3}{5}\right)^3=\dfrac{81}{125}$. ………………………………… 4 分

(2) 由题意知随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2，3，………………………… 5 分

$P(X=0)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$，

$P(X=1)=\dfrac{C_6^1\cdot C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{2}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$，…………………………………………………… 8 分

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{30}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{6}$

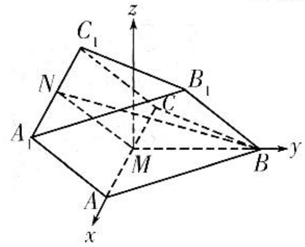
所以 $E(X)=0\times\frac{1}{30}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=\frac{9}{5}$. ………………………………… 10 分

所以甲闯关成功的概率为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$,

因为 $\frac{81}{125}<\frac{2}{3}$,

所以甲比乙闯关成功的可能性大. ………………………………………………… 12 分

20. (1) 证明: 取 AC 的中点 M, 连接 NM, BM, 因为 ACC_1A_1 为矩形, 所以 $AC\perp MN$, 又因为 ABC 为等边三角形, 则 $AC\perp MB$, $MN\cap MB=M$, 所以 $AC\perp$ 平面 BMN, 又 $BN\subset$ 平面 BMN, 所以 $AC\perp BN$. ………………………………… 4 分



在图 2 中 $AA_1/\!/CC_1$, $AA_1/\!/BB_1$, 所以 $BB_1/\!/CC_1$, 故 B,C,C_1,B_1 四点共面. ………………………………………………… 6 分

(2) 由 (1) 知 $MN\perp AC$, $BM\perp AC$,

所以 $\angle NMB$ 为二面角 C_1-AC-B 的平面角, 以 M 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系,

$A(1,0,0)$, $B(0,\sqrt{3},0)$, $C(-1,0,0)$, $N(0,\cos\theta,\sin\theta)$, $C_1(-1,\cos\theta,\sin\theta)$, $\overrightarrow{CB}=(1,\sqrt{3},0)$, $\overrightarrow{CC_1}=(0,\cos\theta,\sin\theta)$, ……………………………………………… 8 分

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由 $\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0,\\ \cos\theta y+\sin\theta z=0,\end{cases}$

令 $y=-1$, 则 $x=\sqrt{3}$, $z=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$,

则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,\frac{1}{\tan\theta})$, ……………………………………………… 10 分

由 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$ 得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,-2)$, $\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$,

设直线 AB 与平面 BCC_1B_1 所成角为 α,

则 $\sin\alpha=|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{AB}>|=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AB}|}=\frac{\sqrt{6}}{4}$. ………………………………… 12 分

21. 解: (1) 由题意知, $c=1$, 焦点分别为 $(-1,0)$, $(1,0)$. ………………………… 1 分

由椭圆定义得: $2a=\sqrt{(1-1)^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}-0)^2}+\sqrt{(1+1)^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}-0)^2}=2\sqrt{2}$, 即 $a=\sqrt{2}$, ……………………………………………………………… 3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$; ……………………………………… 4 分

(2) 设点 $P(x_0,y_0)$, 易知 $x_0\neq\pm\sqrt{2}$, 过点 P 的直线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$,

联立 $\begin{cases}y-y_0=k(x-x_0),\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y 得 $(1+2k^2)x^2+4k(y_0-kx_0)x+2(y_0-kx_0)^2-2=0$,

……………………………………………………………………… 6 分

因为直线 l 与 C 相切,

故 $\Delta=16k^2(y_0-kx_0)^2-8(1+2k^2)[(y_0-kx_0)^2-1]=0$, 得 $(y_0-kx_0)^2=1+2k^2$, ……………………………………………………………………… 8 分

即 $(x_0^2-2)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-1=0$,

设直线 l_1,l_2 的斜率分为 k_1,k_2, 则 $k_1k_2=\frac{y_0^2-1}{x_0^2-2}=-1$, 得 $x_0^2+y_0^2=3$, ………… 10 分

即点 P 到坐标原点 O 的距离 $|PO|=\sqrt{3}$，

所以点 P 在以 O 为圆心的圆上，且点 A 为圆上一点，故若满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，则 AB 为圆 O 的直径，

所以存在点 $B(\sqrt{3},0)$ 满足题意. ……………………………………………… 12 分

22. 解：(1) $f'(x)=e^x-a$，……………………………………………………… 1 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，……………………………………………… 2 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=e^x-a>0$，解得 $x>\ln a$，

令 $f'(x)=e^x-a<0$，解得 $x<\ln a$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，………………… 3 分

综上可知，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增. ……… 4 分

(2) 由 (1) 知 $g(x)=\dfrac{2(e^x-x-1)}{x^2}$，

①要证 $\dfrac{2(e^x-x-1)}{x^2}>1$ 成立，只需证：$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$，即证 $\dfrac{\frac{1}{2}x^2+x+1}{e^x}<1$. …… 5 分

令 $F(x)=\dfrac{\frac{1}{2}x^2+x+1}{e^x}-1$，$F'(x)=\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{e^x}<0$ 恒成立，

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$F(x)<F(0)=\dfrac{1}{e^0}-1=0$，………………… 6 分

所以 $\dfrac{\frac{1}{2}x^2+x+1}{e^x}<1$ 成立，

所以当 $x>0$ 时，$g(x)>1$ 得证. ……………………………………………………… 7 分

②证明：由①可知，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)>1$，

要证：$2^n(e^{x_n}-1)<1$，只需证 $e^{x_n}-1<\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，

因为 $x_1=\dfrac{1}{3}$，所以 $e^{x_1}-1=e^{\frac{1}{3}}-1$，又 $e-\left(\dfrac{3}{2}\right)^3=e-\dfrac{27}{8}<0$，…………………… 8 分

所以 $e^{\frac{1}{3}}<\dfrac{3}{2}$，则 $e^{x_1}-1=e^{\frac{1}{3}}-1<\dfrac{1}{2}$；

再证：$e^{x_{n+1}}-1<\dfrac{1}{2}(e^{x_n}-1)$，

即证 $g(x_n)-1<\dfrac{1}{2}e^{x_n}-\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………… 9 分

只需证当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$(x^2-4)e^x+x^2+4x+4=(x-2)(x+2)e^x+(x+2)^2>0$，

即证 $\dfrac{(x-2)e^x}{x+2}+1>0$ 成立，令 $h(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{x+2}+1$，$h'(x)=\dfrac{e^x}{(x+2)^2}>0$ 恒成立，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$h(x)>h(0)=\dfrac{-2\cdot e^0}{2}+1=0$.

所以 $\dfrac{x-2}{x+2}\cdot e^x+1>0$ 恒成立，即 $g(x_n)-1<\dfrac{1}{2}e^{x_n}-\dfrac{1}{2}$ 成立.

所以 $e^{x_{n+1}}-1<\dfrac{1}{2}(e^{x_n}-1)<\dfrac{1}{2^2}(e^{x_{n-1}}-1)<\cdots<\dfrac{1}{2^n}(e^{x_1}-1)<\dfrac{1}{2^{n+1}}$ 成立，…… 11 分

即 $e^{x_n}-1<\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ 成立，故原不等式得证. ……………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。