长郡中学2020届高三适应性考试（三）

文科数学参考答案

命题人：高三文数备课组　　审题人：陈　贞

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	C	B	A	D	C	B	A	D	A	B

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$　　14. $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$；$\sqrt{3}$　　15. -17　　16. $h_0\tan\left(\varphi_0+23^\circ26'\right)$

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：（Ⅰ）取PC中点M，连接DM，MF，

$\because M$，F分别是PC，PB中点，$\therefore MF//CB, MF=\frac{1}{2}CB$．…………（2分）

$\because E$为DA中点，$ABCD$为正方形，$\therefore DE//CB, DE=\frac{1}{2}CB$．…………（3分）

$\therefore MF//DE$，$MF=DE$，$\therefore$四边形$DEFM$为平行四边形．…………（4分）

$\therefore EF//DM$，$\because EF\not\subset$平面PDC，$DM\subset$平面PDC，

$\therefore EF//$平面RDC．…………………………………………………………（5分）

（Ⅱ）$\because EF//$平面PDC，$\therefore F$到平面PDC的距离等于E到平面PDC的距离，

$\because PA\perp$平面$ABCD$，$\therefore PA\perp DA$，

$\because PA=AD=1$，在$\mathrm{Rt}\Delta PAD$中$DP=\sqrt{2}$，

$\because PA\perp$平面$ABCD$，$\therefore PA\perp CB$．…………………………………………（6分）

$\because CB\perp AB$，$PA\bigcap AB=A$，$\therefore CB\perp$平面PAB，

$\therefore CB\perp PB$，则$PC=\sqrt{3}$，

$\because PD^2+DC^2=PC^2$，

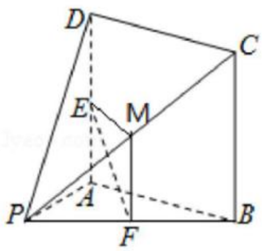
$\therefore \Delta PDC$为直角三角形．…………………………………………………（8分）

$\therefore S_{\Delta PDC}=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．…………………………………………（9分）

$\therefore V_{E-PDC}=V_{C-PDE}$，设$E$到平面$PDC$的距离为$h$，

则$\frac{1}{3}\bullet h\bullet\frac{1}{2}\bullet 1\bullet\sqrt{2}=\frac{1}{3}\bullet 1\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}\bullet 1$．…………………………………………（10分）

解得$h=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\therefore F$到平面PDC的距离为$\frac{\sqrt{2}}{4}$．．…………………（12分）



18. 解：（Ⅰ）根据题意，由等比中项的知识，可知：数列$\{S_n+1\}$为等比数列．

又 $\because S_1+1=a_1+1=1+1=2$，

$S_2+1=a_1+a_2+1=1+2+1=4$，

$\therefore$ 公比 $q=\dfrac{S_2+1}{S_1+1}=\dfrac{4}{2}=2$．……（2 分）

$\therefore$ 数列 $\{S_n+1\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列．……（3 分）

$\therefore S_n+1=2^n$，

$\therefore S_n=2^n-1$．……（4 分）

（Ⅱ）证明：由题意及（1），可知：

①当 $n=1$ 时，$a_1=1$．……（5 分）

②当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$．

$\therefore a_n=2^{n-1}$，$(n\in N^*)$．……（6 分）

$\therefore \dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$，$(n\in N^*)$．……（7 分）

$T_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^{n-1}}$

$=\dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=2-(\dfrac{1}{2})^{n-1}$．……（9 分）

$\because n\in N^*$，

$\therefore 0<(\dfrac{1}{2})^{n-1}\leqslant 1$．……（10 分）

$\therefore -1\leqslant -(\dfrac{1}{2})^{n-1}<0$，

$\therefore 1\leqslant 2-(\dfrac{1}{2})^{n-1}<2$．……（11 分）

$\therefore 1\leqslant T_n<2$．……（12 分）

19．解：（Ⅰ）由 $\overline{y}=\dfrac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{6}y_i=80$，得 $\dfrac{91+86+p+78+73+70}{6}=80$，

求得 $p=82$．……（4 分）

（Ⅱ）$\because \overline{x}=\dfrac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$，

而 $\overline{y}=\dfrac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{6}y_i=80$，$\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i=1606$，$\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2=91$，

$\therefore \hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i-6\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{6}x_i^2-6\overline{x}^2}=\dfrac{1606-6\times 3.5\times 80}{91-6\times 3.5^2}\approx -4$．

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=80+4\times 3.5=94$（或 $\hat{a}=80-\left(-\dfrac{74}{17.5}\right)\times 3.5\approx 95$）．

$\therefore$ 所求的线性回归方程为 $\hat{y}=-4x+94$（或 $\hat{y}=-4x+95$）．……（8 分）

（Ⅲ）当 $x_1=1$ 时，$\hat{y}_1=90$；当 $x_2=2$ 时，$\hat{y}_2=86$；当 $x_3=3$ 时，$\hat{y}_3=82$；

当 $x_4=4$ 时，$\hat{y}_4=78$；当 $x_5=5$ 时，$\hat{y}_5=74$；当 $x_6=6$ 时，$\hat{y}_6=70$.

满足 $\left|\hat{y}_i-y_i\right|<1$ 条件的"有效数据"有：(2，86)、(3，82)、(4，78)、(6，70）共有 4 个.

从 6 个销售数据中任意抽取 2 个的所有可能结果有 15 种，

抽取的 2 组销售数据都是"有效数据"的有 $C_4^2=6$ 种，

∴抽取的 2 组销售数据都是"有效数据"的概率为 $\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$. ⋯⋯⋯⋯（12 分）

20．解：（Ⅰ）椭圆的焦点坐标为 $(\pm2,0)$，长轴长为 8，

设双曲线的方程 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

则 $a=2$，$c=4$，则 $b^2=12$，双曲线的方程 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯（2 分）

（Ⅱ）由题意可知过点 M 的直线斜率存在且不等于 0，

设直线 l 方程为 $x=my+3$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

联立方程组 $\begin{cases}x=my+3\\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1\end{cases}$，消去 x，得 $(3m^2+4)y^2+18my-21=0$，

$y_1+y_2=-\dfrac{18m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{21}{3m^2+4}$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯（3 分）

∴

$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\times|OE|\times|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{1}{2}\times3\times4\sqrt{3}\sqrt{\frac{12m^2+7}{(3m^2+4)^2}}=6\sqrt{3}\sqrt{\frac{12m^2+7}{(3m^2+4)^2}}$$

⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯（5 分）

令 $12m^2+7=t\geqslant7$，则 $m^2=\dfrac{t-7}{12}$，

所以 $\dfrac{12m^2+7}{(3m^2+4)^2}=\dfrac{16t}{t^2+18t+81}=\dfrac{16}{t+\dfrac{81}{t}+18}\leqslant\dfrac{16}{2\sqrt{t\times\dfrac{81}{t}}+18}=\dfrac{4}{9}$，

当且仅当 $t=9$，即 $m^2=\dfrac{1}{6}$ 时，取等号，

则 $S_{\Delta OAB}=6\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{12m^2+7}{(3m^2+4)^2}}\leqslant6\sqrt{3}\times\dfrac{2}{3}=4\sqrt{3}$，

所以 ΔOAB 面积的最大值为 $4\sqrt{3}$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯（6 分）

（Ⅲ）存在这样的直线 $y=kx+m$，使得向量 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$ 成立，

且这样的直线有 9 条.

由 $\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1\end{cases}$，消去 y，整理得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-48=0$，

设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\dfrac{8km}{3+4k^2}$，$\triangle_1=(8km)^2-4(3+4k^2)(4m^2-48)>0$，①

由 $\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1 \end{cases}$，消去 y，整理得 $(3-k^2)x^2-2kmx-m^2-12=0$，

设 $C(x_3,\ y_4)$，$D(x_4,\ y_4)$，

则 $x_3+x_4=\dfrac{2km}{3-k^2}$，$\triangle_2=(-2km)^2+4(3-k^2)(m^2+12)>0$，②

因为 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$，

所以 $(y_4-y_2)+(y_3-y_1)=0$．……………………………………………（8 分）

由 $x_1+x_2=x_3+x_4$ 得 $-\dfrac{8km}{3+4k^2}=\dfrac{2km}{3-k^2}$．

所以 $2km=0$ 或 $-\dfrac{4}{3+4k^2}=\dfrac{1}{3-k^2}$．……………………………………（9 分）

由上式解得 $k=0$ 或 $m=0$．当 $k=0$ 时，

由①和②得 $-2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}$．…………………………………………（10 分）

因为 m 是整数，所以 m 的值为 -3，-2，-1，0，1，2，3．

当 $m=0$，由①和②得 $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$．

因为 k 是整数，所以 $k=-1$，0，1．……………………………………（11 分）

于是满足条件的直线共有 9 条．…………………………………………（12 分）

21．解：（Ⅰ）设切点为 $(x_0,\ \dfrac{lnx_0}{x_0})$，函数的导数 $f'(x)=\dfrac{1-lnx}{x^2}$，

则切线斜率为 $f'(x_0)=\dfrac{1-lnx_0}{x_0^2}$．

则切线方程为 $y-\dfrac{lnx_0}{x_0}=\dfrac{1-lnx_0}{x_0^2}(x-x_0)$．……………………………（1 分）

即直线 l 的方程为 $y=\dfrac{1-lnx_0}{x_0^2}x+\dfrac{2lnx_0-1}{x_0}$．…………………………（2 分）

$\because y=kx+2e^{-\frac{3}{2}}$ 与 $y=f(x)$ 的图象相切，

$\therefore \dfrac{2lnx_0-1}{x_0}=2e^{-\frac{3}{2}}$，即 $2lnx_0-2e^{-\frac{3}{2}}x_0-1=0$．……………………（3 分）

令 $h(t)=2lnt-2e^{-\frac{3}{2}}t-1$，则 $h'(t)=\dfrac{2}{t}-2e^{-\frac{3}{2}}$，

由 $h'(t)>0$ 得 $\dfrac{2}{t}-2e^{-\frac{3}{2}}>0$，得 $0<t<e^{\frac{3}{2}}$，此时为增函数，

由 $h'(t)<0$ 得 $\dfrac{2}{t}-2e^{-\frac{3}{2}}<0$，得 $t>e^{\frac{3}{2}}$，此时为减函数，

即当 $x=e^{\frac{3}{2}}$ 时，$h(t)$ 取得极大值，$h(e^{\frac{3}{2}})=2lne^{\frac{3}{2}}-2e^{-\frac{3}{2}}\cdot e^{\frac{3}{2}}-1=3-2-1=0$，

即 $h(t)=0$ 有唯一的一个解 $t=e^{\frac{3}{2}}$，即 $x_0=e^{\frac{3}{2}}$．……………………………（5 分）

则 $k=\dfrac{1-lnx_0}{x_0^2}=\dfrac{1-lne^{\frac{3}{2}}}{(e^{\frac{3}{2}})^2}=\dfrac{1-\frac{3}{2}}{e^3}=-\dfrac{1}{2e^3}$．……………………………（6 分）

（Ⅱ）令 $g(x)=\dfrac{lnx}{x}-kx-a$，则 $g'(x)=\dfrac{1-lnx}{x^2}-k$，$g''(x)=\dfrac{2lnx-3}{x^3}$，

当 $0<x<e^{\frac{3}{2}}$ 时，$g''(x)<0$，$g'(x)$ 单调递减，

当 $x>e^{\frac{3}{2}}$ 时，$g''(x)>0$，$g'(x)$ 单调递增，

$\therefore g'(x)\geqslant g'(e^{\frac{3}{2}})=-\frac{1}{2e^3}-k$. ………………………………………………（7 分）

①当 $k\leqslant-\frac{1}{2e^3}$ 时，$g'(x)\geqslant0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g(e^k)=\frac{k}{e^k}-k\bullet e^k-a<k(e^{-k}-e^k)<0$，

当 $x\geqslant1$ 时，$\frac{lnx}{x}\geqslant0$，当 $x\geqslant-\frac{a}{k}$ 时，$-kx-a\geqslant0$，

$\therefore$ 取 $x_1=max\{1，-\frac{a}{k}\}$，则 $g(x_1)\geqslant\frac{ln1}{1}-k\bullet(-\frac{a}{k})-a=0$，

$\therefore g(x)$ 有唯一零点. ②当 $\frac{1}{2e^3}<k<0$ 时，注意到 $k=\frac{1}{2e^3}$，$a=2e^{-\frac{3}{2}}$ 时，

$g(x)=\frac{lnx}{x}+\frac{1}{2e^3}x-2e^{-\frac{3}{2}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\because g(e^{\frac{3}{2}})=\frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}}+\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2e^3}-2e^{-\frac{3}{2}}=0$，

$\therefore$ 当 $0<x\leqslant e^{\frac{3}{2}}$ 时，$\frac{lnx}{x}\leqslant-\frac{1}{2e^3}x-2e^{-\frac{3}{2}}<kx+a$，

故 $g(x)<0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0，e^{\frac{3}{2}}]$ 上没有零点. ………………………………（9 分）

当 $x>e^{\frac{3}{2}}$ 时，$g'(x)$ 在 $[e^{\frac{3}{2}}，+\infty)$ 上单调递增，$g'(e^{\frac{3}{2}})=-\frac{1}{2e^3}-k<0$，

$$g'(-\frac{1}{k})=\frac{1-ln(-\frac{1}{k})}{\frac{1}{k^2}}-k>\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}}-k=0$$

$\therefore$ 存在 $t\in(e^{\frac{3}{2}}，+\infty)$，当 $e^{\frac{3}{2}}<x<t$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x>t$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

又 $g(e^{\frac{3}{2}})=\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}-k\bullet e^{\frac{3}{2}}-a\leqslant-\frac{1}{2e^{\frac{3}{2}}}-k\bullet e^{\frac{3}{2}}=-\frac{1+2ke^3}{2e^{\frac{3}{2}}}<0$，$g(t)<g(e^{\frac{3}{2}})<0$，

取 $x_2=max\{1，-\frac{a}{k}\}$，则 $g(x_2)>0$，

$\therefore g(x)=0$ 有唯一零点. ………………………………………………………（11 分）

综上当 $a\geqslant2e^{-\frac{3}{2}}$ 时，对 $\forall k<0$，

直线 $l:y=kx+a$ 与 $y=f(x)$ 的图象有唯一公共点. ……………………（12 分）

22．解：（Ⅰ）曲线 C 的极坐标方程是 $\rho=4\cos\theta$，即 $\rho^2=4\rho\cos\theta$.

化为直角坐标方程是：$x^2+y^2=4x$，即 $(x-2)^2+y^2=4$. ……………（2 分）

直线 l 的直角坐标方程为：$y=x-m$，

$\therefore$圆心$(2,0)$到直线l的距离（弦心距）为$d=\sqrt{2^2-(\frac{\sqrt{14}}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

圆心$(2,0)$到直线$y=x-m$的距离为：即$\frac{|2-0-m|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………（4分）

$\therefore|m-2|=1$，解得$m=1$或$m=3$. ……………………………………………（5分）

（Ⅱ）曲线C的方程可化为$(x-2)^2+y^2=4$. ……………………………………（6分）

其参数方程为$\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）；

又$M(x,y)$为曲线C上任意一点，

$\therefore x+y=2+2\cos\theta+2\sin\theta=2+2\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$. ……………………………（8分）

$\therefore x+y$的取值范围是$[2-2\sqrt{2},2+2\sqrt{2}]$. . ………………………………（10分）

23．解：（Ⅰ）$f(x)\leqslant 4\Leftrightarrow\begin{cases}x<\frac{1}{2}\\-3x+2\leqslant 4\end{cases}$ 或$\begin{cases}\frac{1}{2}\leqslant x<1\\x\leqslant 4\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant 1\\3x-2\leqslant 4\end{cases}$. ……………………………（2分）

解得$-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2$. ……………………………………………………………………（3分）

故不等式$f(x)\leqslant 4$的解集为$\{x|-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2\}$. ……………………………………（4分）

（Ⅱ）$\because f(x)=\begin{cases}-3x+2, & x<\frac{1}{2}\\x, & \frac{1}{2}\leqslant x<1\\3x-2, & x\geqslant 1\end{cases}$，$\therefore f(x)_{min}=\frac{1}{2}$，即$m=\frac{1}{2}$. ………………（5分）

又a，b，$c\in R^+$且$a+b+c=\frac{1}{2}$，z则$2a+2b+2c=1$，

设$x=\sqrt{2a+1}$，$y=\sqrt{2b+1}$，$z=\sqrt{2c+1}$，

$\because x^2+y^2\geqslant 2xy$，$2xy\leqslant x^2+y^2=2a+1+2b+1=2a+2b+2$，

同理：$2yz\leqslant 2a+2c+2$，$2xz\leqslant 2c+2a+2$，

$\therefore 2xy+2yz+2xz\leqslant 2a+2b+2+2b+2c+2+2c+2a+2=8$. …………（7分）

$\therefore(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz\leqslant 2a+1+2b+1+2c+1+8=12$，

$\therefore x+y+z\leqslant 2\sqrt{3}$，即$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}\leqslant 2\sqrt{3}$. ………………（9分）

当且仅当$a=b=c=\frac{1}{6}$时，取得最大值$2\sqrt{3}$. ……………………………（10分）

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注

福利：

1、关注后回复“答题模板”，即可获得高中 9 科答题模板资料

2、回复“清北华五”，即可获得清北华东五校特殊选拔考试模式及真题