高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知 $3\bar{z}-2z=2-5i$，则 $z=$

A. $2-i$　　B. $2+i$　　C. $-2-i$　　D. $-2+i$

2. 已知集合 $M=\{x|2x^2+x-3<0\}$，$N=\{x|x<-1\}$，则 $M\cap(\complement_{\mathbf{R}}N)=$

A. $\left\{x\middle|-\frac{3}{2}<x<-1\right\}$　　B. $\left\{x\middle|-1<x<\frac{3}{2}\right\}$

C. $\left\{x\middle|-1\leqslant x<\frac{3}{2}\right\}$　　D. $\{x|-1\leqslant x<1\}$

3. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，若 $ab^2>b^3$，则下列关系一定成立的是

A. $\log_{\frac{1}{2}}a>\log_{\frac{1}{2}}b$　　B. $a^2>b^2$　　C. $2^a>2^b$　　D. $\ln(a-b)>0$

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,-2)$，$\boldsymbol{b}=(m,1)$，若 $\boldsymbol{a}\parallel(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，则 $m=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{3}{2}$

5. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线过点 $P(-1,\sqrt{3})$，F 是 C 的左焦点，且 $|PF|=2$，则双曲线 C 的方程为

A. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　B. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　C. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$　　D. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$

6. 设 S_n 是公差不为0的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $S_7=5a_6$，则 $\frac{S_{10}}{a_9}=$

A. 6　　B. $\frac{13}{2}$　　C. 7　　D. $\frac{15}{2}$

7. 若函数 $f(x)=\frac{1}{x}\left(x^3+\frac{2}{e^x+1}-m\right)$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的偶函数，则 $m=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

8. 若$\left(1-\frac{a}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$的展开式中$x^{-2}$的系数为75，则$a=$

A. -3　　B. -2　　C. 2　　D. 3

9. 不等式$2\ln x>x\ln 2$的解集是

A. $(1,2)$　　B. $(2,4)$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(4,+\infty)$

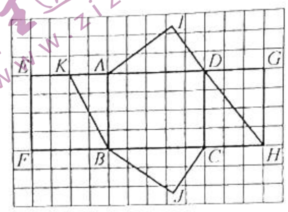
10. 如图是某三棱柱的平面展开图，网格中的小正方形的边长均为1，则在原三棱柱中，异面直线BK和DH所成角的余弦值为

A. $\frac{3}{10}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{4\sqrt{5}}{25}$

D. $\frac{8\sqrt{5}}{25}$



11. 在三棱锥$P-ABC$中，平面$ABC\perp$平面PBC，$\triangle ABC$和$\triangle PBC$都是边长为$2\sqrt{3}$的等边三角形，若M为三棱锥$P-ABC$外接球上的动点，则点M到平面ABC距离的最大值为

A. $\sqrt{6}-\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

C. $\sqrt{5}-1$　　D. $\sqrt{5}+1$

12. 已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的准线$x=-1$与x轴交于点A，F为C的焦点，B是C上第一象限内的点，则$\frac{|AB|}{|BF|}$取得最大值时，$\triangle ABF$的面积为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知实数x,y满足$\begin{cases}x+y+5\geqslant 0,\\2x+5y+10\leqslant 0,\\x-2y-4\leqslant 0,\end{cases}$则$z=x+3y$的最小值为________.

14. 设S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_n+S_n=4$，则$S_5=$________.

15. 在一个口袋中有大小和质地相同的4个白球和3个红球，若不放回的依次从口袋中每次摸出一个球，直到摸出2个红球就停止，则连续摸4次停止的概率等于________.

16. 已知函数$f(x)=(a+b\cos x)\sin x$，在①②中任选一个作为已知条件，再从③④⑤中选出在这个条件下成立的所有结论，则你所选的编号为________.（写出一组符合要求的答案即可）

①$a=1,b=1$；②$a=1,b=-1$；③$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上为单调函数；④$f(x)$的图象关于点$(\pi,0)$对称；⑤$f(x)$在$x=\frac{5\pi}{3}$处取得最小值$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $2a\cos B\sin C+c\sin A=0$.

(1)求 B；

(2)若△ABC 的面积为 $\sqrt{3}$，角 B 的平分线交 AC 于 D，且 $BD=\frac{4}{5}$，求 b.

18.（12 分）

某大型超市为调查 2022 年元旦购物者的消费情况，从当天消费金额不低于 50 元的购物者中随机抽取 100 名进行调查，得到如下统计表：

消费金额(单位:元)	[50,100)	[100,150)	[150,200)	[200,250)	[250,+∞)
顾客人数(单位:人)	10	15	35	25	15

(1)从这 100 名购物者中随机抽取 1 人，估计该人消费金额低于 200 元的概率；

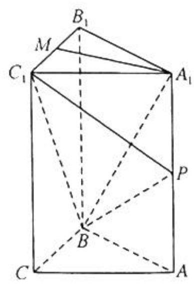
(2)以频率估计概率，从元旦当天消费金额不低于 50 元的购物者中随机抽取 3 人，记消费金额不低于 200 元的购物者人数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

19.（12 分）

如图，P,M 分别是正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的棱 AA_1，B_1C_1 的中点，且棱 $AA_1=3$，$AB=2$.

(1)求证：A_1M∥平面 PBC_1；

(2)求锐二面角 $A_1-BC_1-B_1$ 的余弦值.



20.(12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-ax-1$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $a=e-2$,求证:当 $x>0$ 时,$f(x)\geq x^2$.

21.(12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,P 是 C 短轴的一个端点,且 $\triangle PF_1F_2$ 为等腰直角三角形,$|F_1F_2|=2$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)设过 F_2 的直线与 C 交于 A,B 两点,M 是线段 AB 的中点,过点 $A(x_1,y_1)(x_1y_1\neq 0)$ 的直线 l 的方程为 $x_1x+2y_1y=2$,直线 l 与 OM 交于点 N,求证:$\angle AF_2N$ 为定值.

(二)选考题:共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-3-4t,\\ y=2+3t\end{cases}$($t$ 为参数),以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-10\rho\sin\theta+5=0$.

(1)求直线 l 的普通方程及曲线 C 的直角坐标方程;

(2)若射线 $\theta=\alpha(\rho\geq 0)$ 与直线 l 垂直,且与曲线 C 交于 A,B 两点,求 $\left|\frac{1}{|OA|}-\frac{1}{|OB|}\right|$ 的值.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

已知正数 a,b,c 满足 $a+b+c=3$.

(1)求 abc 的最大值;

(2)证明:$a^3b+b^3c+c^3a\geq 3abc$.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. B　设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-bi$. 由 $3(a-bi)-2(a+bi)=2-5i$ 得 $a-5bi=2-5i$，所以 $a=2,b=1$，所以 $z=2-i$.

2. D　因为 $M=\{x|2x^2+x-3<0\}=\left\{x\middle|-\frac{3}{2}<x<1\right\}$，$\complement_{\mathbf{R}}N=\{x|x\geqslant-1\}$，所以 $M\cap(\complement_{\mathbf{R}}N)=\{x|-1\leqslant x<1\}$.

3. C　由条件可知 $b^2>0$，所以 $a>b$，则 A 不正确；若 $a=1,b=-2$，则 B 不正确；由指数函数 $y=2^x$ 的单调性可知，$2^a>2^b$，则 C 正确；若 $a=2,b=1$，则 $\ln(a-b)=0$，则 D 不正确.

4. D　因为 $\boldsymbol{a}=(3,-2),\boldsymbol{b}=(m,1)$，所以 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(3-2m,-4)$，因为 $\boldsymbol{a}\parallel(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，所以 $3\times(-4)+2(3-2m)=0$，解得 $m=-\frac{3}{2}$.

5. A　由题意可知，双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，点 $P(-1,\sqrt{3})$ 在一条渐近线上，所以 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，则 $b=\sqrt{3}a$，且两条渐近线的倾斜角分别为 $60°,120°$. 又 $|PF|=2$，$|OP|=2$（O 为坐标原点），所以 $\triangle OFP$ 为等边三角形，从而 $c=2$. 由 $a^2+b^2=c^2$，解得 $a^2=1,b^2=3$，所以双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

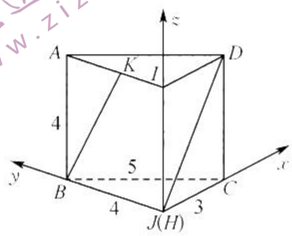
6. B　设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由题意可知，$7a_1+\frac{7\times6}{2}d=5(a_1+5d)$，解得 $a_1=2d$，所以 $a_9=a_1+8d=10d$，$S_{10}=10a_1+\frac{10\times9}{2}d=65d$，则 $\frac{S_{10}}{a_9}=\frac{65}{10}=\frac{13}{2}$.

7. C　因为 $f(x)$ 是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的偶函数，函数 $y=\frac{1}{x}$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数，所以 $g(x)=x^3+\frac{2}{e^x+1}-m$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数，则 $g(-x)=-g(x)$，即 $-x^3+\frac{2}{e^{-x}+1}-m=-(x^3+\frac{2}{e^x+1}-m)$，整理得 $2m=\frac{2}{e^x+1}+\frac{2}{e^{-x}+1}=\frac{2(e^x+1)}{e^x+1}=2$，所以 $m=1$.

8. A　$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_6^rx^{6-2r}$，所以 $\left(1-\frac{a}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中 x^{-2} 的系数为 $C_6^4+(-a)C_6^3=15-20a$，由题知，$15-20a=75$，解得 $a=-3$.

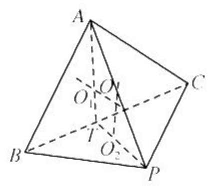
9. B　设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上是增函数，在 $(e,+\infty)$ 上是减函数. 原不等式可化为 $\frac{\ln x}{x}>\frac{\ln 2}{2}$，即 $f(x)>f(2)$，结合 $f(2)=f(4)$，可得 $2<x<4$，所以原不等式的解集为 $\{x|2<x<4\}$.

10. D　法一：将平面展开图折成立体图形，建立如图所示的空间直角坐标系 $J-xyz$，则 $B(0,4,0),K(0,2,4),D(3,0,4),J(0,0,0)$，所以 $\overrightarrow{BK}=(0,-2,4)$，$\overrightarrow{DJ}=(-3,0,-4)$，所以 $|\cos\langle\overrightarrow{BK},\overrightarrow{DJ}\rangle|=\left|\frac{-16}{\sqrt{(-2)^2+4^2}\times\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}}\right|=\frac{8\sqrt{5}}{25}$.



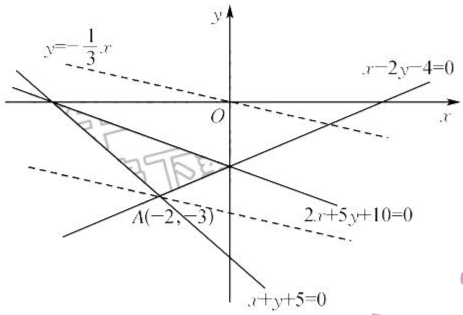
法二：在棱柱中，JB,JC,JI 两两互相垂直，则 $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{JI}-\frac{1}{2}\overrightarrow{JB}$，$\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{JC}$，所以 $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{JI}^2=16$，又 $BK=2\sqrt{5}$，$JD=5$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{BK},\overrightarrow{JD}\rangle=\frac{\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{JD}}{|\overrightarrow{BK}|\cdot|\overrightarrow{JD}|}=\frac{16}{2\sqrt{5}\times5}=\frac{8\sqrt{5}}{25}$.

11. D　设 BC 中点为 T，$\triangle ABC$ 的外心为 O_1，$\triangle PBC$ 的外心为 O_2，过点 O_1 作平面 ABC 的垂线，过点 O_2 作平面 PBC 的垂线，两条垂线的交点 O 即为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心，因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PBC$ 都是边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形，可得 $PT=AT=3$，因为平面 $PBC\perp$ 平面 ABC，且 $TO_1=TO_2=\frac{1}{3}AT=1$，所以四边形 OO_1TO_2 是边长为 1 的正方形，所以外接球半径 $R=OP=\sqrt{OO_2^2+O_2P^2}=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$，$M$ 到平面 ABC 的距离 $d\leqslant R+OO_1=\sqrt{5}+1$.



12. A　由题意可知，$A(-1,0)$，$F(1,0)$，过点 B 作准线 $x=-1$ 的垂线，垂足为 D，由抛物线的定义可知，$\frac{|AB|}{|BF|}=\frac{|AB|}{|BD|}=\frac{1}{\sin\angle BAD}$，要使 $\frac{|AB|}{|BF|}$ 取得最大值，则 $\sin\angle BAD$ 取得最小值，需直线 AB 与 C 相切. 设直线 AB 的方程为 $y=k(x+1)$，由 $\begin{cases}y=k(x+1),\\y^2=4x,\end{cases}$ 消去 y 可得，$k^2x^2-(2k^2-4)x+k^2=0$，所以 $\Delta=(2k^2-4)^2-4k^4=0$，解得 $k=\pm1$，因为 B 是 C 上第一象限内的点，所以 $k=1$，$B(1,2)$，所以 $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$.

13. -11　可行域如图所示，作出直线 $y=-\frac{1}{3}x$，并平移，当直线 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}z$ 经过 A 时，z 取得最小值. 由 $\begin{cases}x+y+5=0,\\x-2y-4=0,\end{cases}$ 解得 $A(-2,-3)$，$z_{\min}=-2+3\times(-3)=-11$.



14. $\frac{31}{8}$　由 $a_n+S_n=4$ 得，当 $n=1$ 时，$a_1=2$，当 $n\geqslant2$ 时，$a_{n-1}+S_{n-1}=4$，两式相减得 $a_n-a_{n-1}+a_n=0$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，故 $S_5=\dfrac{2[1-(\frac{1}{2})^5]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{8}$.

15. $\frac{9}{35}$　由题意可知，连续依次摸出的 4 个球分别是：白白红红，白红白红，红白白红共 3 种情况，第一种摸出"白白红红"的概率为 $\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{35}$，第二种摸出"白红白红"的概率为 $\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{35}$，第三种摸出"红白白红"的概率为 $\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{35}$，所以连续摸 4 次停止的概率等于 $\frac{9}{35}$.

16. ①④⑤或②③④　选①作为已知条件时，$f(x)=(1+\cos x)\sin x$，则 $f'(x)=2\cos^2x+\cos x-1=(2\cos x-1)(\cos x+1)$，令 $f'(x)>0$，解得 $\cos x>\frac{1}{2}$；令 $f'(x)<0$，解得 $\cos x<\frac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$ 上为增函数，在 $(\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{5\pi}{3}+2k\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$ 上为减函数，显然 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上不单调，③不正确；显然 $f(x)$ 的一个周期是 2π，所以当 $x=\frac{5\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f(\frac{5\pi}{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$，⑤正确；因为 $f(2\pi-x)=[1+\cos(2\pi-x)]\sin(2\pi-x)=-(1+\cos x)\sin x=-f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(\pi,0)$ 对称，④正确，可知选①④⑤. 若选②，$f(x)=(1-\cos x)\sin x$，则 $f'(x)=-2\cos^2x+\cos x+1=(2\cos x+1)(1-\cos x)$，令 $f'(x)>0$，解得 $\cos x>-\frac{1}{2}$；令 $f'(x)<0$，解得 $\cos x<-\frac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$ 上为增函数，在 $(\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{4\pi}{3}+2k\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$ 上为减函数，显然 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，③正确；因为 $f(2\pi-x)=[1-\cos(2\pi-x)]\sin(2\pi-x)=-(1-\cos x)\sin x=-f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(\pi,0)$ 对称，④正确；显然 $f(x)$ 的一个周期是 2π，所以当 $x=\frac{4\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f(\frac{4\pi}{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$，⑤不正确；可知选②③④.

17. 解：(1)由正弦定理及 $2a\cos B\sin C+c\sin A=0$，得 $2ac\cos B+ac=0$，…………………… 3 分

所以 $\cos B=-\frac{1}{2}$. …………………… 4 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{2}{3}\pi$. …………………… 5 分

(2)因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}$，

所以 $\frac{1}{2}BD\cdot c\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}BD\cdot a\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，即 $a+c=5$. …………………… 8 分

又 $\frac{1}{2}ac\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$，所以 $ac=4$. …………………… 10 分

易知方程组 $\begin{cases}a+c=5,\\ac=4\end{cases}$ 有解且 a,c 均大于 0，

由余弦定理得，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\frac{2\pi}{3}=(a+c)^2-ac=21$，

所以 $b=\sqrt{21}$. …………………… 12 分

18. 解：(1)这 100 名购物者中消费金额低于 200 元的人数为 $10+15+35=60$. …………………… 2 分

故从这100名购物者中随机抽取1人,估计该人消费金额低于200元的概率为$P=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$. …………………… 4分

(2)由题意可知,X的可能取值0,1,2,3

由(1)知,任意1名购物者消费金额低于200元的概率为$P_1=\frac{3}{5}$,

消费金额不低于200元的概率为$P_2=1-P_1=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$,

若以频率估计概率,则X服从二项分布$N\left(3,\frac{2}{5}\right)$. …………………… 6分

$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$; …………………… 7分

$P(X=1)=C_3^1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$; …………………… 8分

$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{36}{125}$; …………………… 9分

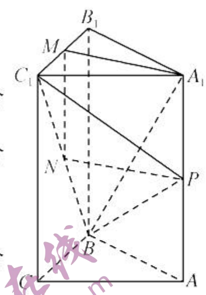
$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^0=\frac{8}{125}$. …………………… 10分

所以X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$E(X)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$. …………………… 12分

19.(1)证明:在线段BC_1上取中点N,连结MN、NP.



因为MN是$\triangle C_1BB_1$的中位线,

所以$MN//B_1B$,且$MN=\frac{1}{2}B_1B$. …………………… 2分

又因为$A_1P//B_1B$,且$A_1P=\frac{1}{2}B_1B$. …………………… 3分

所以,$MN//A_1P$,且$MN=A_1P$,

所以$MNPA_1$是平行四边形,

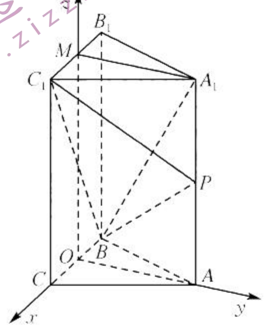
所以$A_1M//PN$, …………………… 4分

又$A_1M\not\subset$平面PBC_1,$PN\subset$平面PBC_1,

所以$A_1M//$平面PBC_1. …………………… 6分

(2)解:取BC中点O,因为三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$是正三棱柱,

所以$\triangle ABC$是等边三角形,所以$OA\perp BC$. …………………… 7分



分别以$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OM}$的方向为x轴,y轴,z轴的正方向建立空间直角坐标系$O-xyz$,则

$B(-1,0,0)$,$C_1(1,0,3)$,$A_1(0,\sqrt{3},3)$. …………………… 8分

所以$\overrightarrow{BC_1}=(2,0,3)$,$\overrightarrow{BA_1}=(1,\sqrt{3},3)$.

设平面A_1BC_1的一个法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$.

则$\begin{cases}\overrightarrow{BC_1}\cdot\boldsymbol{n}_1=2x-3z=0,\\ \overrightarrow{BA_1}\cdot\boldsymbol{n}_1=x+\sqrt{3}y+3z=0,\end{cases}$ 取$x=3$,则$\boldsymbol{n}_1=(3,\sqrt{3},-2)$. …………………… 10分

因为平面BB_1C_1的一个法向量为$\boldsymbol{n}_2=(0,1,0)$,

所以$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{3\times0+\sqrt{3}\times1+(-2)\times0}{\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2+(-2)^2}\times1}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

所以锐二面角$A_1-BC_1-B_1$的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$. …………………… 12分

20.解:(1)$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,$f'(x)=e^x-a$.

当$a\leqslant0$时,$f'(x)>0$,则$f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数; …………………… 2分

当$a>0$时,$f'(x)=e^x-e^{\ln a}$.

当$x<\ln a$时,$f'(x)<0$;当$x>\ln a$时,$f'(x)>0$,

所以$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上为减函数,在$(\ln a,+\infty)$上为增函数. …………………… 4分

(2)由$a=e-2$及$f(x)\geqslant x^2$,得$e^x-x^2-(e-2)x-1\geqslant0$.

设$h(x)=e^x-x^2-(e-2)x-1(x>0)$,则$h'(x)=e^x-2x-e+2$.

设$g(x)=e^x-2x-e+2$,则$g'(x)=e^x-2$.

当$0<x<\ln 2$时,$g'(x)<0$;当$x>\ln 2$时,$g'(x)>0$,

所以$h'(x)$在$(0,\ln 2)$上为减函数,在$(\ln 2,+\infty)$上为增函数,

所以$x=\ln 2$是$h'(x)$的极小值点,也是$h'(x)$的最小值点. …………………… 6分

因为 $0<\ln 2<1$，$h'(1)=0$，所以 $h'(\ln 2)<h'(1)=0$，

又 $h'(0)=3-e>0$，所以存在 $x_0\in(0,\ln 2)$，使得 $h'(x_0)=0$，……………… 8 分

所以当 $x\in(0,x_0)\cup(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(x_0,1)$ 时，$h'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上为增函数，在 $(x_0,1)$ 上为减函数，在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $h(x_0)$ 为 $h(x)$ 的极大值，$h(1)$ 为 $h(x)$ 的极小值，……………… 10 分

因为 $h(0)=h(1)=0$，所以当 $x>0$ 时，$h(x)\geqslant 0$（当且仅当 $x=1$ 时取等号），

故当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant x^2$． ……………… 12 分

21. (1)解：设 $F_2(c,0)$，则 $|F_1F_2|=2c=2$，即 $c=1$；……………… 1 分

由 $\triangle PF_1F_2$ 为等腰直角三角形，得 $a=\sqrt{2}c=\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$． ……………… 2 分

所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2-1}=1$，……………… 3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$． ……………… 4 分

(2)证明：由直线 AB 过焦点 $F_2(1,0)$，当 $x_1\neq 1$ 时，得直线 AB 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-1}(x-1)$，……………… 5 分

代入 $x^2+2y^2=2$，并结合 $x_1^2+2y_1^2=2$ 整理，得 $(3-2x_1)x^2-4y_1^2x+2y_1^2-2(x_1-1)^2=0$，

设 $B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{4y_1^2}{3-2x_1}$，……………… 7 分

设 $M(x_0,y_0)$，则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2y_1^2}{3-2x_1}$，……………… 8 分

结合 $2y_1^2=2-x_1^2$，得 $\frac{y_0}{x_0}=\frac{\frac{y_1}{x_1-1}(x_0-1)}{x_0}=\frac{y_1}{x_1-1}(1-\frac{1}{x_0})=\frac{y_1}{x_1-1}(1-\frac{3-2x_1}{2y_1^2})$

$=\frac{y_1}{x_1-1}\cdot\frac{2y_1^2-3+2x_1}{2y_1^2}=\frac{2-x_1^2-3+2x_1}{2(x_1-1)y_1}=-\frac{x_1-1}{2y_1}$，……………… 10 分

所以直线 OM 的方程为 $y=-\frac{x_1-1}{2y_1}x$，……………… 11 分

由 $\begin{cases}x_1x+2y_1y=2,\\ y=-\frac{x_1-1}{2y_1}x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=-\frac{x_1-1}{y_1},\end{cases}$ 即 $N(2,-\frac{x_1-1}{y_1})$，

所以 $k_{AF_2}\cdot k_{NF_2}=\frac{y_1}{x_1-1}\cdot\frac{-\frac{x_1-1}{y_1}-0}{2-1}=-1$，即 $\angle AF_2N=90^\circ$，

当 $x_1=1$ 时，AB 中点为 F_2，即 $M(1,0)$，直线 l 与 OM 交点 N 坐标为 $(2,0)$，

由此时 $AF_2\perp x$ 轴知 $\angle AF_2N=90^\circ$，故 $\angle AF_2N$ 为定值． ……………… 12 分

22. 解：(1)直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-3-4t,\\ y=2+3t\end{cases}$（$t$ 为参数），消去参数 t，

得直线 l 的普通方程为 $3x+4y+1=0$． ……………… 2 分

将 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\sin\theta=y$ 代入 $\rho^2-10\rho\sin\theta+5=0$，

得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-10y+5=0$． ……………… 5 分

(2)因为射线 $\theta=\alpha(\rho\geqslant 0)$ 与直线 $l:3x+4y+1=0$ 垂直，

所以 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$． ……………… 6 分

将 $\theta=\alpha(\rho\geqslant 0)$ 代入曲线 C 的极坐标方程得 $\rho^2-8\rho+5=0$，

设 A、B 所对应的极径分别为 ρ_A，ρ_B，则 $\Delta=8^2-4\times 5=44>0$，$\rho_A+\rho_B=8$，$\rho_A\rho_B=5$，

易知 ρ_A，ρ_B 均大于 0，

所以 $\left|\frac{1}{|OA|}-\frac{1}{|OB|}\right|=\left|\frac{1}{\rho_A}-\frac{1}{\rho_B}\right|=\left|\frac{\rho_B-\rho_A}{\rho_A\rho_B}\right|=\frac{1}{5}\sqrt{(\rho_B+\rho_A)^2-4\rho_A\rho_B}=\frac{2\sqrt{11}}{5}$． ……………… 10 分

23. (1)解：由 $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$，当且仅当 $a=b=c$ 时，取得等号． ……………… 2 分

又 $a+b+c=3$，所以 $abc\leqslant\left(\frac{3}{3}\right)^3=1$．

故当且仅当 $a=b=c=1$ 时，abc 取得最大值 1． ……………… 5 分

(2)证明：要证 $a^2b+b^2c+c^2a\geqslant 3abc$，需证 $\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\geqslant 3$． ……………… 6 分

因为 $\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+(a+b+c)=\left(\frac{a^2}{c}+c\right)+\left(\frac{b^2}{a}+a\right)+\left(\frac{c^2}{b}+b\right)$

$\geqslant 2\sqrt{a^2}+2\sqrt{b^2}+2\sqrt{c^2}=2(a+b+c)=6$，即 $\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\geqslant 3$，当且仅当 $a=b=c=1$ 时取得等号．

故 $a^2b+b^2c+c^2a\geqslant 3abc$． ……………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。