湘豫名校联考
2023年4月高三第二次模拟考试
数学(理科)

注意事项:

1. 本试卷共6页。时间120分钟,满分150分。答题前,考生先将自己的姓名、准考证号填写在试卷指定位置,并将姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上,然后认真核对条形码上的信息,并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 作答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。作答非选择题时,将答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将试卷和答题卡一并收回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

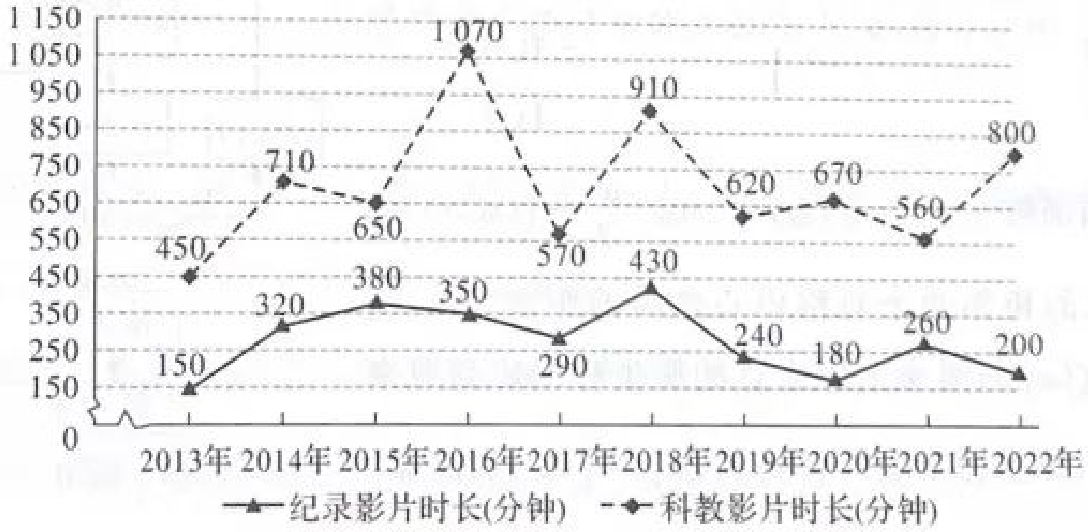
1. 已知集合 $A=\left\{x\in \mathbf{Z}\,\middle|\,\dfrac{x+1}{x-4}\leqslant 0\right\}$,$B=\{y\mid y=3^x+1\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{0,1,2,3\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $(1,4)$　　D. $\{2,3\}$

2. 已知复数 z 满足 $(1-2i)z=|2\sqrt{2}+i|-i$,则 z 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 某电影制片厂从2013年至2022年生产的纪录影片、科教影片的时长(单位:分钟)如图所示,则



A. 该电影制片厂2013年至2022年生产的纪录影片时长的中位数为270分钟

B. 该电影制片厂2013年至2022年生产的科教影片时长的平均数小于660分钟

C. 该电影制片厂2013年至2022年生产的科教影片时长的标准差大于纪录影片时长的标准差

D. 该电影制片厂2013年至2022年生产的科教影片时长的极差是纪录影片时长的极差的4倍

4. 已知抛物线 $E:y^2=8x$ 的准线为 l，圆 $x^2+y^2=20$ 与抛物线 E 交于 A,B 两点，与 l 交于 C,D 两点，则由 A,B,C,D 四点所围成的四边形的周长为

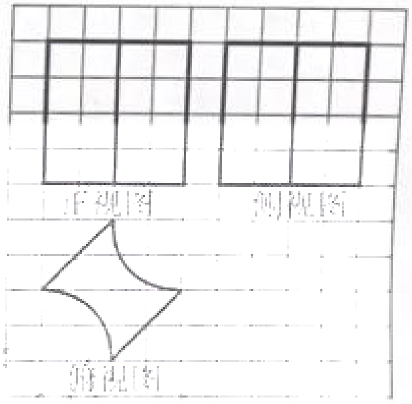
A. 20　　B. 24　　C. 28　　D. 32

5. 若 $a=\log_4 5, b=\frac{1}{2}\log_2 6, c=\left(\frac{1}{2}\right)^{0.6}$，则

A. $b>a>c$　　B. $a>b>c$

C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

6. 如图，网格纸上用粗实线绘制了一个几何体的三视图，每一个小正方形的边长为1，则该几何体的体积为



第6题图

A. $48-4\pi$　　B. $48-8\pi$

C. $64-8\pi$　　D. $64-4\pi$

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_4+a_7+a_{10}=10$，$a_3+a_6+a_9+a_{12}=30$，则 $a_8+a_{11}=$

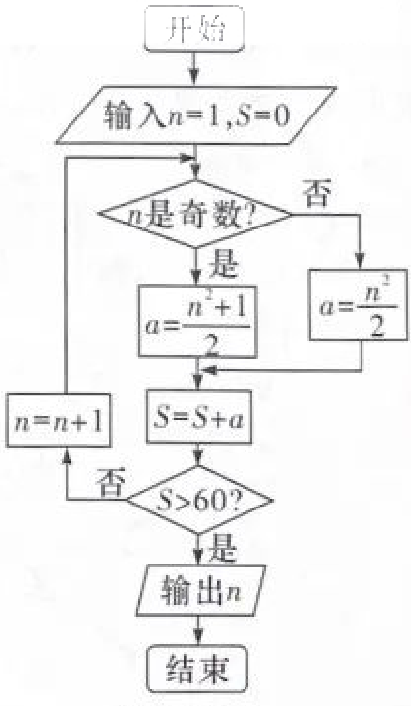
A. 25　　B. 35

C. 40　　D. 50

8. 执行如图所示的程序框图，输出的 $n=$

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8



第8题图

9. 已知函数 $f(x)=\sin \omega x+2\cos^2\frac{\omega x}{2}-1(\omega>0)$ 的图象的相邻两个对称中心之间的距离为 π，把 $y=f(x)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变），得到函数 $y=g(x)$ 的图象，

则 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{7\pi}{24},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为

A. $[-1,\sqrt{2}]$　　B. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

C. $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2}\right]$　　D. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

10. 若曲线 $f(x)=\frac{x}{e^x}$ 有三条过点 $(0,a)$ 的切线，则实数 a 的取值范围为

A. $\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$　　B. $\left(0,\frac{4}{e^2}\right)$　　C. $\left(0,\frac{1}{e}\right)$　　D. $\left(0,\frac{4}{e}\right)$

11. 已知圆台 O_1O_2 的母线长为 $2\sqrt{3}$，O_1，O_2 分别为上、下底面的圆心，上、下底面的半径分别为 r_1，r_2，且 $r_2=2r_1$，则当该圆台的体积最大时，其外接球的表面积为 来源：高三答案公众号

A. 180π　　B. 208π　　C. 220π　　D. 228π

12. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，点 M 是双曲线 C 上一点，点 $N\left(\frac{1}{3}c,0\right)$，且 $\angle F_1MN=$ [illegible]，$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MF_1}=0$，则双曲线 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{21}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{15}}{3}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $150°$，则 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为________.

14. 若 $(x^3+1)\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中各项系数之和为 $\frac{1}{32}$，则展开式中 x^3 的系数为________.

15. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，且 $f(3)=0$，则不等式 $\frac{f(x-2)}{x}<0$ 的解集为________.

16. 设锐角三角形 ABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $b\sin B=a\sin A+a\sin C$，则 $\frac{3b-c}{a}$ 的取值范围是________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

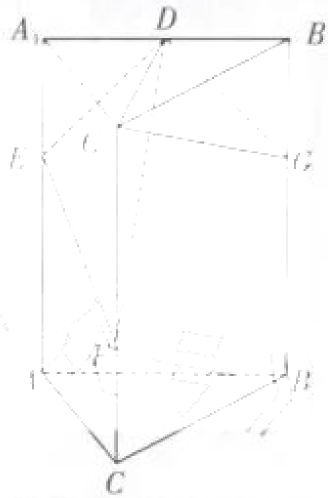
17.(本小题满分 12 分)

在数列$\{a_n\}$中，$a_1=-1$，$a_n=2a_{n-1}+3n-6(n\geqslant 2,n\in \mathbf{N}^*)$.

(1)求证：数列$\{a_n+3n\}$为等比数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=a_n+n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

18.(本小题满分 12 分)



如图所示，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 D,E,F,G 分别为棱 A_1B_1，AA_1，CC_1，BB_1 上的点，且 $A_1D=B_1D$，$AE=2A_1E$，$C_1F=2CF$，$BG=2B_1G$.

(1)证明：$EF//$平面 C_1DG；

(2)若 $AA_1=6$，$BC=2AC=4$，四边形 BCC_1B_1 为矩形，平面 $BCC_1B_1\perp$平面 ACC_1A_1，$AC\perp C_1G$，求平面 C_1DG 与平面 DEF 所成锐二面角的余弦值.

19.(本小题满分 12 分)

2022 年 10 月 12 日，"天宫课堂"第三课在中国空间站开讲，新晋"太空教师"刘洋用 2 米长的吸管成功喝到了芒果汁. 这是中国航天员首次在问天实验舱内进行授课，并通过网络向全国进行直播，这场直播极大地激发了广大中学生对航天知识的兴趣. 为领悟航天精神，感受中国梦想，某校高一年级组织了一次"寻梦天宫"航天知识比赛，比赛规则：每组两个班级，每个班级各派出 3 名同学参加比赛，每一轮比赛中每个班级派出 1 名同学代表其所在班级答题，两个班级都全部答对或者都没有全部答对，则均记 0 分；一

班级全部答对而另一班级没有全部答对，则全部答对的班级记1分，没有全部答对的班级记－1分，三轮比赛结束后，累计得分高的班级获胜. 设甲、乙两个班级为一组参加比赛，每轮比赛中甲班全部答对的概率为$\frac{1}{2}$，乙班全部答对的概率为$\frac{2}{3}$，甲、乙两班答题相互独立，且每轮比赛互不影响.

(1)求甲班每轮比赛得－1分、0分、1分的概率；

(2)两轮比赛后甲班得分为X，求X的分布列和数学期望；

(3)求甲班没有获胜的概率.

20.(本小题满分12分)

已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为[illegible]，椭圆$C$的左、右顶点分别为$A_1$，$A_2$，上顶点为$D$，点$A_1$到直线$A_2D$的距离为[illegible].

(1)求椭圆C的标准方程；

(2)过点$(2,1)$的直线l交椭圆C于P，Q两点，过点P作x轴的垂线交直线A_2Q于点M，点N为PM的中点，证明：直线A_2N的斜率为定值.

21.(本小题满分12分)

已知函数$f(x)=x+\frac{a}{e^x}-ae^x(a\in\mathbf{R})$.

(1)当$a=2$时，求曲线$y=f(x)$在点$(\ln 2,f(\ln 2))$处的切线与两条坐标轴围成的三角形的面积；

(2)若函数$f(x)$有三个不同的零点，求实数a的取值范围.

(二)选考题:共10分.请考生在22、23题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22.(本小题满分10分)选修4—4:坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=4+t, \\ y=2+t \end{cases}$ (t 为参数),以坐标原点为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,动点 M 到定点 $N(1,0)$ 的距离为 $\sqrt{2}$,记动点 M 的轨迹为曲线 C.

(1)求直线 l 的普通方程,曲线 C 的直角坐标方程与极坐标方程;

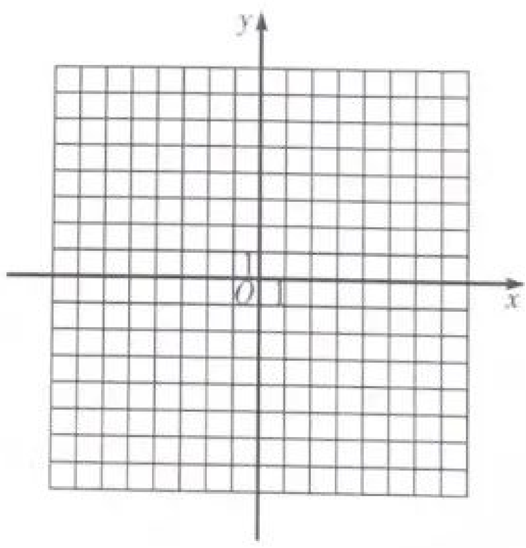
(2)设点 $P(1,-1)$,且直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点,求 $|PA|\cdot\left(|PB|+\frac{1}{|PB|}\right)+|PB|\cdot\left(|PA|+\frac{1}{|PA|}\right)$ 的值.

23.(本小题满分10分)选修4—5:不等式选讲

设函数 $f(x)=|x+1|-3|x-1|$.

(1)作出函数 $f(x)$ 的图象,并求 $f(x)$ 的值域;

(2)若存在 x,使得不等式 $f(x)\geqslant|4x-a|$ 成立,求实数 a 的取值范围.



湘豫名校联考
2023年4月高三第二次模拟考试
数学(理科)参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	D	C	B	A	B	A	C	C	B	D	A

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. D 【命题意图】本题考查不等式的求解和集合的交集运算，考查逻辑推理能力和数学运算的核心素养.

【解析】由$\frac{x+1}{x-4}\leqslant 0$得$-1\leqslant x<4$，所以$A=\{-1,0,1,2,3\}$. 又因为$B=\{y|y>1\}$，所以$A\cap B=\{2,3\}$. 故选D.

2. D 【命题意图】本题考查复数的模、复数除法以及共轭复数的定义，考查数学运算的核心素养.

【解析】因为$|2\sqrt{2}+\mathrm{i}|=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$，所以$z=\frac{3-\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\frac{(3-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=1+\mathrm{i}$. 所以$\bar{z}=1-\mathrm{i}$. 所以$\bar{z}$在复平面内对应的点为$(1,-1)$，位于第四象限. 故选D.

3. C 【命题意图】本题考查数据的表示和样本的数字特征，考查数据分析的核心素养.

【解析】2013年至2022年生产的纪录影片时长的中位数为$\frac{260+290}{2}=275$分钟，A选项错误；2013年至2022年生产的科教影片时长的平均数大于$\frac{400+700+600+1\,000+500+900+600+600+500+800}{10}=660$分钟，B选项错误；由方差的定义可知，科教影片时长的方差大于纪录影片时长的方差，所以科教影片时长的标准差大于纪录影片时长的标准差，C选项正确；科教影片时长的极差是620分钟，纪录影片时长的极差为280分钟，D选项错误. 故选C.

4. B 【命题意图】本题考查抛物线的标准方程和几何性质，考查直观想象和数学运算的核心素养.

【解析】由$\begin{cases}y^2=8x,\\x^2+y^2=20,\end{cases}$得$x=2,y=\pm 4$. 由$\begin{cases}x=-2,\\x^2+y^2=20,\end{cases}$得$x=-2,y=\pm 4$，所以由$A,B,C,D$四点所围成的四边形为矩形，其周长为$2\times(4+8)=24$. 故选B.

5. A 【命题意图】本题考查比较大小和对数函数的单调性以及换底公式，考查逻辑推理的核心素养.

【解析】方法一：因为$a=\log_4 5=\frac{\lg 5}{\lg 4}>1$，$b=\frac{1}{2}\log_2 6=\log_4 6=\frac{\lg 6}{\lg 4}>a$，$0<c=\left(\frac{1}{2}\right)^{0.6}<1$，所以$b>a>c$. 故选A.

方法二：因为$a=\log_4 5$，$b=\frac{1}{2}\log_2 6=\log_4 6$，所以$1<a<b$. 又$0<c=\left(\frac{1}{2}\right)^{0.6}<1$，所以$b>a>c$. 故选A.

6. B 【命题意图】本题考查空间几何体的三视图和体积，考查逻辑推理、直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】由三视图知，该几何体是由一个棱长为4的正方体截去两个相同三棱柱与两个相同$\frac{1}{4}$圆柱而得到的，其中三棱柱的底面是腰长为2的等腰直角三角形，圆柱的底面半径为2，所以该几何体的体积为$V=4^3-2\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 4-2\times\frac{1}{4}\times\pi\times 2^2\times 4=48-8\pi$. 故选B.

7. A 【命题意图】本题考查等差数列的性质，考查数学抽象和逻辑推理的核心素养.

【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，因为$a_1+a_4+a_7+a_{10}=10$，$a_3+a_6+a_9+a_{12}=30$，所以$10+8d=30$，所以$8d=20$. 因为$a_5+a_8+a_{11}+a_{14}=(a_3+a_6+a_9+a_{12})+8d$，所以$2(a_8+a_{11})=30+8d=50$，所以$a_8+a_{11}=25$.

故选 A.

8. C 【命题意图】本题考查程序框图，考查逻辑推理的核心素养.

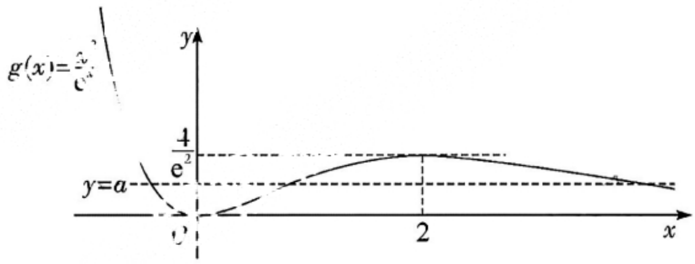
【解析】第一次循环：$a=1$，$S=1<60$，$n=2$；第二次循环：$a=2$，$S=3<60$，$n=3$；第三次循环：$a=5$，$S=8<60$，$n=4$；第四次循环：$a=8$，$S=16<60$，$n=5$；第五次循环：$a=13$，$S=29<60$，$n=6$；第六次循环：$a=18$，$S=47<60$，$n=7$；第七次循环：$a=25$，$S=72>60$，输出 $n=7$. 故选 C.

9. C 【命题意图】本题考查正弦函数的性质和图象变换，考查直观想象和逻辑推理的核心素养.

【解析】因为函数 $f(x)=\sin\omega x+2\cos^2\frac{\omega x}{2}-1=\sin\omega x+\cos\omega x=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$，又 $f(x)$ 的图象的相邻两个对称中心之间的距离为 π，所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，得 $\omega=1$. 把 $y=f(x)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变），得到 $y=g(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，当 $x\in\left[-\frac{7\pi}{24},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right]$. 所以 $g(x)\in\left[-\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2}\right]$. 故选 C.

10. B 【命题意图】本题考查导数的几何意义，考查逻辑推理和数学运算的核心素养.

【解析】设切点坐标为 (x_0,y_0)，则 $y_0=\frac{x_0}{e^{x_0}}$. 因为 $f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，所以切线的斜率为 $k=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}$，切线方程为 $y-\frac{x_0}{e^{x_0}}=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}(x-x_0)$. 将 $(0,a)$ 代入切线方程，得 $a-\frac{x_0}{e^{x_0}}=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}(-x_0)$，则 $a=\frac{x_0^2}{e^{x_0}}$. 设 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}=\frac{x(2-x)}{e^x}$. 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(0,2)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，所以 $g(x)_{极小值}=g(0)=0$，$g(x)_{极大值}=g(2)=\frac{4}{e^2}$，且当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to0$. 画出 $g(x)$ 的图象如图所示. 若曲线 $f(x)$ 有三条过点 $(0,a)$ 的切线，则 $y=a$ 与 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$ 的图象有 3 个交点，由图可得 $0<a<\frac{4}{e^2}$. 故选 B.



11. D 【命题意图】本题考查与外接球有关的体积问题、表面积问题，考查直观想象、逻辑推理和数学运算的核心素养.

【解析】如图 1 所示，设 $r_2=2r_1=2a$，A_1A_2 是圆台的母线，连接 O_1O_2，A_1O_2，易知 $A_1A_2=A_1O_2=2\sqrt{3}$，所以 $0<2a<4\sqrt{3}$，即 $0<a<2\sqrt{3}$. 因为 $O_1O_2=\sqrt{(A_1O_2)^2-(A_1O_1)^2}=\sqrt{12-a^2}$，所以 $V_{圆台O_1O_2}=\frac{1}{3}\pi\cdot(a^2+4a^2+2a^2)\sqrt{12-a^2}=\frac{7}{3}\pi\cdot\sqrt{a^4(12-a^2)}=\frac{7\sqrt{2}}{6}\pi\cdot\sqrt{a^2\cdot a^2\cdot(24-2a^2)}\leqslant\frac{7\sqrt{2}}{6}\pi\cdot\sqrt{\left(\frac{a^2+a^2+24-2a^2}{3}\right)^3}$，当且仅当 $a^2=24-2a^2$，即 $a=2\sqrt{2}$（负值舍去）时等号成立（除此方法外，还可利用函数求导得），此时 $O_1O_2=2$，$r_1=A_1O_1=2\sqrt{2}$，$r_2=A_2O_2=4\sqrt{2}$. 设该圆台外接球的半径为 R，球心为 O，显然球心 O 在 O_1O_2 所在的直线上. 如图 1 所示，当圆台两底面在球心异侧，即球心 O 在线段 O_1O_2 上时，设 $OO_2=x$，则 $OO_1=2-x$，$0<x<2$.

显然 $OA_2=OA_1=R$，所以 $R^2=r_1^2+(2-x)^2=r_2^2+x^2$，即 $8+(2-x)^2=32+x^2$，解得 $x=-5<0$，舍去．如图 2 所示，当圆台两底面在球心同侧时，显然球心 O 在线段 O_1O_2 的延长线上，设 $OO_2=x'$，则 $OO_1=2+x'$，显然 $OB_2=OA_1=R$，所以 $R^2=r_1^2+(2+x')^2=r_2^2+x'^2$，即 $8+(2+x')^2=32+x'^2$，解得 $x'=5$．所以 $R^2=32+x'^2=57$．此时，外接球的表面积为 $4\pi R^2=4\times57\pi=228\pi$．故选 D．

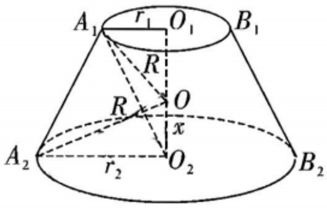


图 1

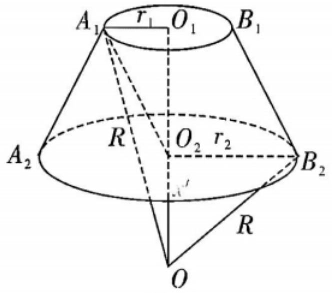
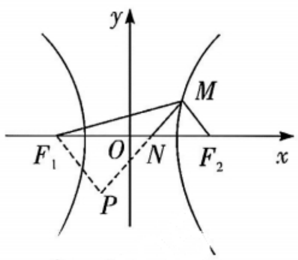


图 2

12．A　【命题意图】本题考查双曲线的几何性质，考查直观想象、逻辑推理和数学运算的核心素养．



【解析】如图，过点 F_1 作 $F_1P\,/\!/\,MF_2$，延长 MN 交 F_1P 于点 P．因为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$N\left(\frac{1}{3}c,0\right)$，所以 $\frac{|MF_2|}{|PF_1|}=\frac{|NF_2|}{|NF_1|}=\frac{1}{2}$．设 $|MF_2|=x$，则 $|PF_1|=2x$，$|MF_1|=x+2a$．因为 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$，所以 $\angle NMF_2=90°$．所以 $\angle MPF_1=90°$．因为在 $\mathrm{Rt}\triangle PF_1M$ 中，$\angle F_1MN=30°$，所以 $|MF_1|=2|PF_1|$，即 $x+2a=4x$．所以 $x=\frac{2a}{3}$．在 $\triangle F_1MF_2$ 中，由余弦定理得 $|F_1F_2|^2=|MF_2|^2+|MF_1|^2-2|MF_2||MF_1|\cos\angle F_1MF_2$，所以 $4c^2=\left(\frac{2a}{3}\right)^2+\left(\frac{8a}{3}\right)^2-2\times\frac{2a}{3}\times\frac{8a}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，整理得 $4c^2=\frac{84a^2}{9}$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{21}}{3}$．故选 A．

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$\frac{\pi}{3}$(或 60°)　【命题意图】本题考查平面向量的数量积运算，考查数学运算的核心素养．

【解析】因为 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 150°，所以 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=4\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4+4\times1\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+3=1$，所以 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$．又因为 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=2+\sqrt{3}\times1\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}$，所以 $\cos\langle2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle=\frac{(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{2}$．所以 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$(或 60°)．

14．$\frac{75}{16}$　【命题意图】本题考查二项式定理，考查逻辑推理和数学运算的核心素养．

【解析】因为 $(x^3+1)\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中各项系数之和为 $\frac{1}{32}$，令 $x=1$，得 $2\times\left(\frac{1}{2}-1\right)^n=\frac{1}{32}$，所以 $n=6$．因为 $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r\left(\frac{x}{2}\right)^{6-r}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_6^r\left(\frac{1}{2}\right)^{6-r}(-1)^rx^{6-\frac{3r}{2}}$，令 $6-\frac{3r}{2}=3$，得 $r=2$；令 $6-\frac{3r}{2}=0$，得 $r=4$，所以展开式中 x^3 的系数为 $C_6^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+C_6^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{75}{16}$．

15．$(-1,0)\cup(5,+\infty)$　【命题意图】本题考查函数的性质，考查数学抽象和逻辑推理的核心素养．

【解析】因为 $f(x)$ 为偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，$f(3)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，$f(-3)=0$．当 $x>0$ 时，由 $f(x-2)<f(3)$，得 $x-2>3$，解得 $x>5$；当 $x<0$ 时，由 $f(x-2)>f(-3)$，得 $-3<x-2<$

0，解得 $-1<x<0$. 所以不等式 $\frac{f(x-2)}{x}<0$ 的解集为 $(-1,0)\cup(5,+\infty)$.

16. $\left(3\sqrt{3}-2,\frac{13}{4}\right]$ 【命题意图】本题考查正弦定理、余弦定理和三角恒等变换，考查数学运算和逻辑推理的核心素养.

【解析】由 $b\sin B=a\sin A+a\sin C$，得 $b^2=a^2+ac$. 由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c^2+ac}{2bc}=\frac{a+c}{2b}$，由正弦定理得 $\frac{a+c}{2b}=\frac{\sin A+\sin C}{2\sin B}=\cos A$，即 $\sin A+\sin C=2\sin B\cos A$. 又 $\sin C=\sin(A+B)$，所以 $\sin A\cos B+\cos A\sin B+\sin A=2\cos A\sin B$，即 $\sin A=\sin B\cos A-\sin A\cos B$，所以 $\sin A=\sin(B-A)$. 因为 A,B 为 $\triangle ABC$ 的内角，所以 $B-A+A=\pi$（舍去），或 $B-A=A$. 所以 $B=2A$. 由正弦定理得 $\frac{3b-c}{a}=\frac{3\sin B-\sin C}{\sin A}=\frac{3\sin 2A-\sin(B+A)}{\sin A}=\frac{3\sin 2A-\sin 3A}{\sin A}$. 因为 $\sin 3A=\sin(2A+A)=\sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A=2\sin A\cos^2 A+\cos 2A\sin A$，又 $\sin A\neq 0$，所以 $\frac{3b-c}{a}=\frac{6\sin A\cos A-2\sin A\cos^2 A-\cos 2A\sin A}{\sin A}=6\cos A-2\cos^2 A-\cos 2A=6\cos A-2\cos^2 A-2\cos^2 A+1=-4\cos^2 A+6\cos A+1=-4\left(\cos A-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{13}{4}$. 由 $B=2A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，得 $A\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. 由 $C=\pi-A-B=\pi-3A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，得 $A\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$，结合 $A\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，可得 $A\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $\cos A\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $\frac{3b-c}{a}$ 的取值范围是 $\left(3\sqrt{3}-2,\frac{13}{4}\right]$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.【命题意图】本题考查等比数列的定义及通项公式、根据递推关系求数列通项、分组求和法的应用，考查逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1) 因为 $a_n=2a_{n-1}+3n-6(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $a_n+3n=2[a_{n-1}+3(n-1)]$. ………… 2 分

因为 $a_1=-1$，所以 $a_1+3=-1+3=2$.

所以 $\{a_n+3n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列. ………… 3 分

故 $a_n+3n=2\times 2^{n-1}=2^n$，即 $a_n=2^n-3n(n\in\mathbf{N}^*)$. ………… 5 分

(2) 由 (1) 知 $b_n=a_n+n=2^n-2n(n\in\mathbf{N}^*)$， ………… 6 分

所以 $T_n=(2^1-2\times 1)+(2^2-2\times 2)+\cdots+(2^n-2n)$ ………… 7 分

$=(2^1+2^2+\cdots+2^n)-2(1+2+3+\cdots+n)$ ………… 9 分

$=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-2\times\frac{n\times(n+1)}{2}$ ………… 11 分

$=2^{n+1}-n^2-n-2(n\in\mathbf{N}^*)$. ………… 12 分

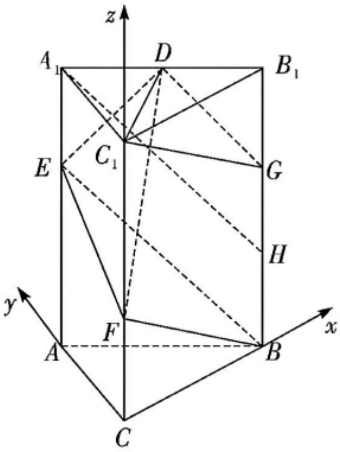
18.【命题意图】本题考查线面平行的判定和利用空间向量求二面角，考查直观想象、逻辑推理和数学运算的核心素养.

【解析】(1) 如图，连接 BF,BE，取 GB 的中点 H，连接 A_1H.

因为 $CC_1\parallel BB_1$，$CC_1=BB_1$，$C_1F=2CF$，$BG=2B_1G$，

所以 $C_1F\parallel BG$，且 $C_1F=BG$.

所以四边形 C_1FBG 是平行四边形.



所以 $BF // C_1G$.

因为 $BF \not\subset$ 平面 C_1DG，$C_1G \subset$ 平面 C_1DG，

所以 $BF //$ 平面 C_1DG. ………………………………………… 2 分

易得点 G 为 B_1H 的中点，因为点 D 为 A_1B_1 的中点，所以 $DG // A_1H$.

因为 $AE=2A_1E$，所以 $AA_1=3A_1E$.

又 $AA_1 \underline{\mathrel{//}} BB_1$，$BB_1=3HB$，所以 $A_1E // HB$ 且 $A_1E=HB$，

所以四边形 A_1EBH 为平行四边形，

所以 $BE // A_1H$，所以 $BE // DG$. ………………………………………… 4 分

因为 $BE \not\subset$ 平面 C_1DG，$DG \subset$ 平面 C_1DG，

所以 $BE //$ 平面 C_1DG.

因为 $BE \cap BF = B$，

所以平面 $BEF //$ 平面 C_1DG.

因为 $EF \subset$ 平面 BEF，

所以 $EF //$ 平面 C_1DG. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)因为四边形 BCC_1B_1 为矩形，

所以 $BC \perp CC_1$.

因为平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1，平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 $ACC_1A_1 = CC_1$，

所以 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1.

因为 $AC \subset$ 平面 ACC_1A_1，所以 $BC \perp AC$.

因为 $AC \perp C_1G$，所以 $AC \perp BF$，

因为 $BF \cap BC = B$，$BF \subset$ 平面 BCC_1B_1，$BC \subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $AC \perp$ 平面 BCC_1B_1.

又 $CC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $AC \perp CC_1$.

以 C 为原点，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CC_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $C_1(0,0,6)$，$D(2,1,6)$，$G(4,0,4)$，$E(0,2,4)$，$F(0,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{C_1D}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{C_1G}=(4,0,-2)$，$\overrightarrow{ED}=(2,-1,2)$，$\overrightarrow{EF}=(0,-2,-2)$. ……………………………… 8 分

设平面 C_1DG 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{C_1D}=2x_1+y_1=0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{C_1G}=4x_1-2z_1=0, \end{cases}$ 令 $x_1=1$，得 $z_1=2$，$y_1=-2$.

所以平面 C_1DG 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-2,2)$. ………………………………………………………… 9 分

设平面 DEF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{ED}=2x_2-y_2+2z_2=0, \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{EF}=-2y_2-2z_2=0, \end{cases}$ 令 $y_2=1$，得 $z_2=-1$.

所以平面 DEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=\left(\frac{3}{2},1,-1\right)$. ………………………………………………………… 10 分

设平面 C_1DG 与平面 DEF 所成的锐二面角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\left|\frac{3}{2}-2-2\right|}{\sqrt{1+4+4}\times\sqrt{\frac{9}{4}+1+1}}=\frac{5\sqrt{17}}{51}$，

所以平面 C_1DG 与平面 DEF 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{17}}{51}$. ………………………………………… 12 分

19.【命题意图】本题考查事件的独立性、二项分布和离散型随机变量的数学期望，考查逻辑推理和数学运算的核心素养.

【解析】(1)记事件 A 为“甲班每轮比赛得 -1 分”，

事件 B 为“甲班每轮比赛得 0 分”，

事件 C 为“甲班每轮比赛得 1 分”，

则 $P(A)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，

$P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$，

$P(C)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}$. ………………………………………………………………………… 3 分

(2)由题意可得，X 的所有取值可能为 $-2,-1,0,1,2$，

则由(1)可得 $P(X=-2)=P(AA)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，

$P(X=-1)=P(AB)+P(BA)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，

$P(X=0)=P(AC)+P(CA)+P(BB)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{13}{36}$，

$P(X=1)=P(BC)+P(CB)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，

$P(X=2)=P(CC)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$，

所以 X 的分布列为

X	-2	-1	0		2
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

所以 $E(X)=(-2)\times\frac{1}{9}+(-1)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{13}{36}+1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{36}=-\frac{1}{3}$. ……………………………… 9 分

(3)记事件 D 为“甲班没有获胜”.

方法一：三轮比赛后，甲班累计得分不高于乙班累计得分的情况有 6 种(不分先后顺序)：

$-1,-1,-1;-1,-1,0;-1,-1,1;-1,0,0;-1,1,0;0,0,0$，

则由(1)可得，$P(D)=\left(\frac{1}{3}\right)^3+C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}+C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{6}+C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{3}+A_3^3\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{173}{216}$. ………………………………………………………………………… 12 分

方法二：由(2)知 $P(D)=P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+P(X=1)\times\frac{1}{3}=\frac{173}{216}$.

………………………………………………………………………………………… 12 分

20.【命题意图】本题考查直线与椭圆的位置关系、定值问题，考查逻辑推理和数学运算的核心素养.

【解析】(1)由题意知 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

由 $a^2=b^2+c^2$，得 $b=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. ………………………………………………………………………… 2 分

由点 $A_2(a,0)$，$D(0,b)$，得直线 A_2D 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，

即 $bx+ay-ab=0$.

因为点 $A_1(-a,0)$ 到直线 A_2D 的距离为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\frac{|-ab-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,解得 $a=2,b=\sqrt{2}$.

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. …………………………………………………… 4 分

(2)由题意可知直线 l 的斜率存在,

设直线 l 的方程为 $y-1=k(x-2)$,即 $y=kx+1-2k$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

联立方程 $\begin{cases} y=kx+1-2k, \\ x^2+2y^2-4=0. \end{cases}$ 消去 y,整理得 $(1+2k^2)x^2+4k(1-2k)x+2(1-2k)^2-4=0$,

则 $\Delta=32k+8>0$.所以 $k>-\frac{1}{4}$.

所以 $x_1+x_2=-\frac{4k(1-2k)}{1+2k^2}$,$x_1x_2=\frac{2(1-2k)^2-4}{1+2k^2}$. …………………………………………… 6 分

所以直线 A_2Q 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$.

令 $x=x_1$,则 $y=\frac{y_2(x_1-2)}{x_2-2}$,所以 $M\left(x_1,\frac{y_2(x_1-2)}{x_2-2}\right)$. …………………………………… 7 分

所以 $\frac{y_2(x_1-2)}{x_2-2}+y_1=\frac{x_1y_2+y_1x_2-2(y_1+y_2)}{x_2-2}$

$=\frac{x_1(kx_2+1-2k)+(kx_1+1-2k)x_2-2(kx_1+kx_2+2-4k)}{x_2-2}$

$=\frac{2kx_1x_2+(1-4k)(x_1+x_2)-4(1-2k)}{x_2-2}$

$=\frac{2k(x_1-2)(x_2-2)+(x_1+x_2)-4}{x_2-2}$. …………………………………………………… 9 分

所以 $N\left(x_1,\frac{2k(x_1-2)(x_2-2)+(x_1+x_2)-4}{2(x_2-2)}\right)$.

所以直线 A_2N 的斜率为

$\frac{y_N-0}{x_N-2}=\frac{y_N}{x_1-2}=\frac{\frac{2k(x_1-2)(x_2-2)+(x_1+x_2)-4}{2(x_2-2)}}{x_1-2}$

$=\frac{2k(x_1-2)(x_2-2)+(x_1+x_2)-4}{2(x_2-2)(x_1-2)}$

$=k+\frac{x_1+x_2-4}{2[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4]}$

$=k+\frac{-\frac{4k(1-2k)}{1+2k^2}-4}{2\left[\frac{2(1-2k)^2-4}{1+2k^2}+\frac{8k(1-2k)}{1+2k^2}+4\right]}$

$=k+\frac{-4k+8k^2-4(1+2k^2)}{2[2(1-2k)^2-4+8k(1-2k)+4(1+2k^2)]}$

$=k+\frac{-4k+8k^2-4-8k^2}{2(2-8k+8k^2-4+8k-16k^2+4+8k^2)}=-1$.

所以直线 A_2N 的斜率为定值 -1. ………………………………………………………… 12 分

21.【命题意图】本题考查导数的几何意义、根据零点个数求参数的取值范围,考查逻辑推理、直观想象、数学运

算的核心素养.

【解析】(1)因为当 $a=2$ 时，$f(x)=x+\frac{2}{e^x}-2e^x$，所以 $f(\ln 2)=\ln 2-3$.

又 $f'(x)=1-\frac{2}{e^x}-2e^x$，所以切线的斜率为 $f'(\ln 2)=-4$. ………………………………………… 1 分

所以切线方程为 $y-(\ln 2-3)=-4(x-\ln 2)$. ………………………………………………………… 2 分

令 $x=0$，得 $y=5\ln 2-3$；令 $y=0$，得 $x=\frac{5\ln 2-3}{4}$. ………………………………………… 3 分

所以切线与两条坐标轴围成的三角形的面积为

$S=\frac{1}{2}|5\ln 2-3|\times\left|\frac{5\ln 2-3}{4}\right|=\frac{(5\ln 2-3)^2}{8}$. ………………………………………………… 4 分

(2)方法一：因为 $f(x)=x-\frac{a}{e^x}-ae^x$，所以 $f'(x)=1-\frac{a}{e^x}-ae^x=\frac{-ae^{2x}+e^x-a}{e^x}$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 至多有一个零点. ……………………………… 5 分

令 $t=e^x(t>0)$，则 $g(t)=\frac{-at^2+t-a}{t}(t>0)$.

当 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，因为 $\Delta=1-4a^2\leqslant 0$，所以 $-at^2+t-a\leqslant 0$.

所以 $f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$ 单调递减，所以 $f(x)$ 至多有一个零点. ……………………………………… 6 分

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，令 $g(t)=0$，得 $t_1=\frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}$，$t_2=\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}$.

当 $t_1<t<t_2$，即 $\ln t_1<x<\ln t_2$ 时，$g(t)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

又 $f'(0)=1-2a>0$，

所以 $\ln t_1<0<\ln t_2$.

又因为 $f(x)$ 是连续的函数，且 $f(0)=0$，

所以 $f(\ln t_1)<0$，$f(\ln t_2)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(\ln t_1,\ln t_2)$ 上只有一个零点. ………………………………………………………… 8 分

当 $t>t_2$ 或 $0<t<t_1$，即 $x>\ln t_2$ 或 $x<\ln t_1$ 时，$g(t)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

因为 $f\left(\ln\frac{1}{a^2}\right)=\ln\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}+a^3=-2\ln a-\frac{1}{a}+a^3$

设 $h(a)=-2\ln a-\frac{1}{a}+a^3\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$，则 $h'(a)=-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}+3a^2=\frac{3a^4-2a+1}{a^2}>0$，

所以 $h(a)$ 单调递增，所以 $h(a)<h\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 4-2+\frac{1}{8}<0$，即 $f\left(\ln\frac{1}{a^2}\right)<0$. ………………………… 9 分

因为 $t_2=\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}<\frac{1}{a}<\frac{1}{a^2}$，即 $\ln t_2<\ln\frac{1}{a^2}$，

又因为 $f(x)$ 是连续的函数，所以 $f(x)$ 在 $\left(\ln t_2,\ln\frac{1}{a}\right)$ 上只有一个零点.

所以 $f(x)$ 在 $(\ln t_2,+\infty)$ 上只有一个零点 x_0，并设 $x_0=\ln t_0$. ………………………………… 10 分

因为 $f(\ln t_0)+f\left(\ln\frac{1}{t_0}\right)=\ln t_0+\frac{a}{t_0}-at_0+\ln\frac{1}{t_0}+at_0-\frac{a}{t_0}=0$，所以 $f\left(\ln\frac{1}{t_0}\right)=0$，且 $0<\ln\frac{1}{t_0}<\ln\frac{1}{t_2}=$ $\ln t_1$（提示：韦达定理 $t_1t_2=1$）.

又因为 $f(x)$ 是连续的函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln t_1)$ 上只有一个零点 $\ln\frac{1}{t_0}$. ………………………… 11 分

综上可知，当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有三个不同的零点.

故实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. ……………………………………………………………………… 12 分

方法二：因为 $f(0)=0$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的零点，

因为当 $a=0$ 时，$f(x)$ 只有一个零点 $x=0$，不满足题意，所以 $a\neq0$. ……………………………………… 5 分

当 $x\neq0$，$a\neq0$ 时，由 $f(x)=0$，得 $\frac{1}{a}=\frac{e^x-e^{-x}}{x}$.

令 $y=\frac{1}{a}$，$y=h(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x}(x\neq0)$，

则 $f(x)$ 有三个不同的零点，只需 $y=\frac{1}{a}$ 与 $y=h(x)$ 的图象有两个不同的交点. ………………………… 7 分

因为 $h(x)=h(-x)$，所以 $h(x)$ 为偶函数.

$h'(x)=\frac{e^x(x-1)+e^{-x}(x+1)}{x^2}$，

令 $u(x)=e^x(x-1)+e^{-x}(x+1)$，则 $u'(x)=x(e^x-e^{-x})$.

因为当 $x>0$ 时，$u'(x)>0$，所以 $u(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………… 9 分

所以 $u(x)>u(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $h(x)$ 为偶函数，所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减. ……………………………………………………… 10 分

因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}(e^x+e^{-x})=2$，所以 $h(x)>2$.

所以 $\frac{1}{a}>2$，即 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$y=\frac{1}{a}$ 与 $y=h(x)$ 的图象有两个不同的交点，

即 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 有三个不同的零点.

故实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. ……………………………………………………………………… 12 分

（注：方法二涉及洛必达法则，对学生不作要求，学生用此方法解答也可得分.）

(二)选考题：共 10 分. 请考生在 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.【命题意图】本题考查参数方程化普通方程、直角坐标方程化极坐标方程、参数的几何意义的应用，考查逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1) 因为直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=4+t,\\y=2+t\end{cases}$ (t 为参数)，

所以消去参数 t，得直线 l 的普通方程为 $x-y-2=0$. ……………………………………………………… 1 分

易知点 N 的直角坐标为 $(1,0)$，由题意知 $|MN|=\sqrt{2}$. ……………………………………………………… 2 分

设 $M(x,y)$，则 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{2}$，即 $(x-1)^2+y^2=2$，即曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x-1=0$.
…… 3 分

因为 $\rho^2=x^2+y^2$，$x=\rho\cos\theta$，

所以曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-1=0$. ……………………………………………………… 4 分

(2) 由题意可知，点 $P(1,-1)$ 在直线 l 上，

直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数). …………………………………………… 5 分

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的直角坐标方程中,得 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-1\right)^2=2$,

化简得 $t^2-\sqrt{2}t-1=0$. ………………………………………………………………… 6 分

设 A,B 两点对应的参数分别为 t_1,t_2,则 $t_1+t_2=\sqrt{2}$,$t_1t_2=-1$. ……………………………… 7 分

所以 $|PA|\left(|PB|+\frac{1}{|PB|}\right)+|PB|\left(|PA|+\frac{1}{|PA|}\right)=\frac{|PA|(|PB|^2+1)}{|PB|}+\frac{|PB|(|PA|^2+1)}{|PA|}$

$=\frac{2|PA|^2|PB|^2+|PA|^2+|PB|^2}{|PA|\cdot|PB|}=\frac{2t_1^2t_2^2+(t_1^2+t_2^2)}{|t_1t_2|}$

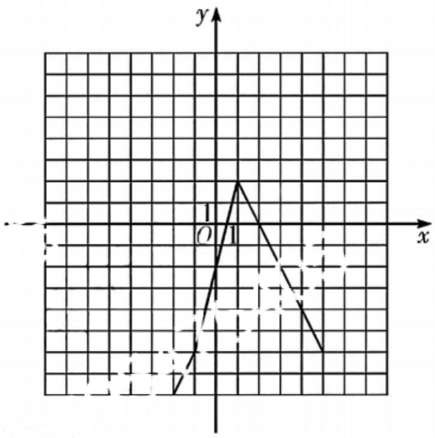
$=\frac{2(t_1t_2)^2+(t_1+t_2)^2-2t_1t_2}{|t_1t_2|}$ ………………………………………………………… 9 分

$=\frac{2\times(-1)^2+(\sqrt{2})^2-2\times(-1)}{1}=6$. ……………………………………………………… 10 分

23.【命题意图】本题考查双绝对值函数的图象和含参不等式,考查直观想象、逻辑推理和数学运算的核心素养.

【解析】(1)由题意知

$$f(x)=|x+1|-3|x-1|=\begin{cases}2x-4, & x\leqslant-1,\\ 4x-2, & -1<x<1,\\ -2x+4, & x\geqslant1,\end{cases}$$ ……… 2 分



则 $f(x)$ 的图象如图所示,

由 $f(x)$ 的图象可知 $f(x)$ 的值域为(−[illegible]. ………… 5 分

(2)由 $4x-2=0$,得 $x=\frac{1}{2}$;

由 $-2x+4=0$,得 $x=2$. ……………………………… 7 分

若存在 x,使得不等式 $f(x)\geqslant|4x-a|$ 成立,

则由 $f(x)$ 的图象可知 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{a}{4}\leqslant2$,解得 $2\leqslant a\leqslant8$.

故实数 a 的取值范围为[2,8]. ………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。