



参考答案

一、选择题: DADCB ACCA

二、填空题: 10. $4+3i$ 11. $\frac{7}{3}$ 12. $x-2y+5=0$ 或 $2x-y-5=0$
13. $\frac{4}{9}, \frac{1}{2}$ 14. 12 15. $-\frac{12}{25}, -\frac{1}{8}$

三、解答题:

$$16. [\text{解}] (1) \because \cos B = -\frac{4}{5}, B \in (0, \pi), \therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

$$\because a=5, b=6, \text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ 得: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \therefore \sin A = \frac{1}{2}.$$

$$\because A \in (0, \pi), a < b, \therefore A = \frac{\pi}{6}.$$

$$(2) \text{由}(1) \text{知: } \sin B = \frac{3}{5}, A = \frac{\pi}{6}.$$

$$\because A+B+C=\pi,$$

$$\therefore \sin C = \sin[\pi - (A+B)] = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3\sqrt{3}-4}{10}.$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ 得: } c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{6 \times \frac{3\sqrt{3}-4}{10}}{\frac{3}{5}} = 3\sqrt{3}-4.$$

$$(3) \text{由}(1) \text{知: } \sin B = \frac{3}{5}, A = \frac{\pi}{6}.$$

$$\therefore \sin 2B = 2 \sin B \cos B = 2 \times \frac{3}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}, \quad \cos 2B = 2 \cos^2 B - 1 = 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25}.$$

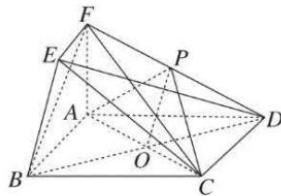
$$\therefore \sin (2B+A) = \sin 2B \cos A + \cos 2B \sin A = \left(-\frac{24}{25}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{25} \times \frac{1}{2} = \frac{7-24\sqrt{3}}{50}.$$

17. [解] (1) 证明: 如图, 连接 BD , 交 AC 于点 O , 连接 PO .

由四边形 $ABCD$ 为矩形易得 $BO=DO$,

又点 P 为棱 DF 的中点, 所以 $BF \parallel PO$,

因为 $PO \subset$ 平面 APC , $BF \not\subset$ 平面 APC , 所以 $BF \parallel$ 平面 APC .



(2) 因为直线 $AF \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AF \perp AB$, $AF \perp AD$,

由四边形 $ABCD$ 为矩形可知 $AD \perp AB$,

所以以 A 为原点, AB, AD, AF 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示,



则 $A(0,0,0), B(1,0,0), D(0,2,0), E\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right), C(1,2,0),$

$F(0,0,1), P\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$, 所以 $\overrightarrow{BC}=(0,2,0), \overrightarrow{BF}=(-1,0,1),$

设平面 BCF 的法向量 $\vec{n}=(x, y, z)$, $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC}=0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BF}=0 \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} 2y=0 \\ -x+z=0 \end{cases} \quad \text{令 } x=1, \text{ 则 } y=0, z=1, \text{ 得 } \vec{n}=(1,0,1),$$

又 $\overrightarrow{DE}=\left(\frac{1}{2}, -2, 1\right)$, 设直线 DE 与平面 BCF 所成角为 θ ,

$$\sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{DE} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{DE}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{DE}|} = \frac{\sqrt{42}}{14},$$

所以直线 DE 与平面 BCF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{14}$.

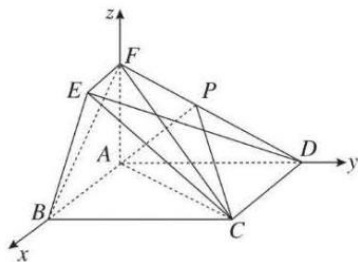
(3)由(2)得 $\overrightarrow{AC}=(1,2,0), \overrightarrow{AP}=\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$, 平面 BCF 的一个法向量 $\vec{n}=(1,0,1),$

设平面 ACP 的法向量为 $\vec{m}=(x_1, y_1, z_1)$, 则 $\vec{m}=(x_1, y_1, z_1)$ 即 $\begin{cases} x_1 + 2y_1 = 0 \\ y_1 + \frac{1}{2}z_1 = 0 \end{cases}$

令 $y_1=-1$, 则 $x_1=2, z_1=2$, 所以平面 ACP 的一个法向量 $m=(2,-1,2),$

$$\text{所以 } |\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

所以平面 ACP 与平面 BCF 的夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.



$$18. [\text{解}] (1) \text{ 由题意得 } \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot 2c = 2\sqrt{3} \end{cases}, \text{ 则有 } \begin{cases} a=2 \\ b=\sqrt{3} \\ c=1 \end{cases}, \therefore \text{椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 设点 $M(x_0, y_0)$, 直线 l 的方程为 $y=kx+m$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并整理, 得 } (3+4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0, \text{ 由 } \Delta = 0, \text{ 得 } m^2 = 3+4k^2,$$

$$x_0 = \frac{-8km}{2(3+4k^2)} = \frac{-4k}{m}, \quad y_0 = kx_0 + m = \frac{3}{m}, \quad \therefore M\left(\frac{-4k}{m}, \frac{3}{m}\right), \therefore \text{直线 } OM \text{ 的方程为 } y = -\frac{3}{4k}x.$$

又 $\because F(1,0), N(0,m), \therefore \text{直线 } NF \text{ 的方程为 } y = -mx + m$

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{3}{4k}x \\ y = -mx + m \end{cases} \text{ 解得 } y_P = \frac{3m}{3-4km}$$

$$\text{由 } S_{\triangle OFP} = \frac{1}{3} S_{\triangle OFN} \text{ 得 } \frac{1}{2} \cdot |OF| \cdot y_P = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \cdot |OF| \cdot y_N$$

$$\therefore y_P = \frac{3}{7} y_N, \therefore \frac{3m}{3-4km} = \frac{3m}{7}, \therefore km = -1, \text{ 故 } m = \frac{-1}{k}, \text{ 代入 } m^2 = 3+4k^2, \text{ 化简得 } 4k^4 + 3k^2 - 1 = 0,$$

$$\text{即 } (4k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0, \text{ 得 } k^2 = \frac{1}{4}, \text{ 又 } \because M \text{ 在第一象限}, \therefore k = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的斜率为 } k = -\frac{1}{2}.$$

19. [解](1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q, q > 0$, 设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d .

$$\because a_1 = 1, a_3 = a_2 + 2, \therefore q^2 = q + 2, \because q > 0, \therefore q = 2, \therefore a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}.$$

$$\because a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6, \therefore \begin{cases} 2b_1 + 6d = 8 \\ 3b_1 + 13d = 16 \end{cases}, \therefore \begin{cases} b_1 = 1 \\ d = 1 \end{cases} \therefore b_n = b_1 + (n-1)d = n.$$

$$(2) c_n = (-1)^{n-1} n \cdot 2^{n-1} + \frac{(n-2) \cdot 2^{n-1} - 1}{(2^{n-1} + 1)(2^n + 1)} = n \cdot (-2)^{n-1} + \frac{(n-2) \cdot 2^{n-1} - 1}{(2^{n-1} + 1)(2^n + 1)}$$

$$\text{令 } \alpha_n = n \cdot (-2)^{n-1}, \beta_n = \frac{(n-2) \cdot 2^{n-1} - 1}{(2^{n-1} + 1)(2^n + 1)}$$

记数列 $\{\alpha_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 A , 数列 $\{\beta_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 B

$$A = 1 \times (-2)^0 + 2 \times (-2)^1 + 3 \times (-2)^2 + \cdots + 2n \cdot (-2)^{2n-1} \quad ①$$

$$-2A = 1 \times (-2)^1 + 2 \times (-2)^2 + 3 \times (-2)^3 + \cdots + 2n \cdot (-2)^{2n} \quad ②$$

① - ② 得

$$\begin{aligned} 3A &= (-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + \cdots + (-2)^{2n-1} - 2n \cdot (-2)^{2n} \\ &= \frac{(-2)^0 - (-2)^{2n}}{1 - (-2)} - 2n \cdot (-2)^{2n} = \frac{1}{3} - \frac{1+6n}{3} \cdot 2^{2n} \end{aligned}$$

$$\therefore A = \frac{1}{9} - \frac{1+6n}{9} \cdot 4^n$$

$$\beta_n = \frac{(n-2) \cdot 2^{n-1} - 1}{(2^{n-1} + 1)(2^n + 1)} = \frac{n-1}{2^{n-1} + 1} - \frac{n}{2^n + 1}$$

$$\therefore B = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{2n}$$

$$= \left(\frac{0}{2^0 + 1} - \frac{1}{2^1 + 1} \right) + \left(\frac{1}{2^1 + 1} - \frac{2}{2^2 + 1} \right) + \cdots + \left(\frac{2n-1}{2^{2n-1} + 1} - \frac{2n}{2^{2n} + 1} \right) = -\frac{2n}{4^n + 1}$$

$$\therefore T_{2n} = A + B = \frac{1}{9} - \frac{1+6n}{9} \cdot 4^n - \frac{2n}{4^n + 1}$$



20.[解](1)函数 $f(x)=\ln x+ax$ 的导数为 $f'(x)=\frac{1}{x}+a$, $\therefore f'(t)=\frac{1}{t}+a$,

$\therefore$ 函数在点 $(t, f(t))$ 的切线方程为 $y-(\ln t+at)=(\frac{1}{t}+a)(x-t)$, 即 $y=(\frac{1}{t}+a)x+\ln t-1$,

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{t}+a=3, \\ \ln t-1=-1, \end{cases} \quad \text{解得 } a=2.$$

(2)由(1)可得 $f(x)=\ln x+2x$,

$$\therefore f(x)>k\left(1-\frac{3}{x}\right)+2x-1, \therefore \ln x>k\left(1-\frac{3}{x}\right)-1, x\ln x+x-k(x-3)>0,$$

可令 $g(x)=x\ln x+x-k(x-3)$, $\therefore g'(x)=2+\ln x-k$,

由 $x>1$, $k\leq 2$, 可得 $\ln x>0$, $2-k\geq 0$, 即有 $g'(x)>0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增, 可得 $g(x)>g(1)=1+2k\geq 0$, $\therefore -\frac{1}{2}\leq k\leq 2$,

故 k 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$.

(3)对于在 $(0, 1)$ 中的任意一个常数 b ,

假设存在正数 x_0 , 使得: $e^{f(x_0+1)-3x_0-2}+\frac{b}{2}x_0^2<1$.

$$\text{由 } e^{f(x_0+1)-3x_0-2}+\frac{b}{2}x_0^2=e^{\ln(x_0+1)-x_0}+\frac{b}{2}x_0^2=(x_0+1)e^{-x_0}+\frac{b}{2}x_0^2<1 \text{ 成立,}$$

从而存在正数 x_0 , 使得上式成立,

令 $H(x)=(x+1)e^{-x}+\frac{b}{2}x^2-1$, 只需上式的最小值小于 0 即可.

$$H'(x)=e^{-x}-(x+1)e^{-x}+bx=x(b-e^{-x}),$$

令 $H'(x)>0$, 解得 $x>-\ln b$, $\therefore H(x)$ 在 $(-\ln b, +\infty)$ 上单调递增

令 $H'(x)<0$, 解得 $0<x<-\ln b$, $\therefore H(x)$ 在 $(0, -\ln b)$ 上单调递减

则 $x=-\ln b$ 为函数 $H(x)$ 的极小值点, 即为最小值点.

$$\text{故 } H(x) \text{ 的最小值为 } H(-\ln b)=(-\ln b+1)\cdot e^{\ln b}+\frac{b}{2}\ln^2 b-1=\frac{b}{2}\ln^2 b-b\ln b+b-1,$$

再令 $G(x)=\frac{x}{2}\ln^2 x-x\ln x+x-1(0<x<1)$,

$$G'(x)=\frac{1}{2}(\ln^2 x+2\ln x)-(1+\ln x)+1=\frac{1}{2}\ln^2 x>0,$$

则 $G(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递增, 可得 $G(x)<G(1)=0$, 则 $H(-\ln b)<0$.

故存在正数 $x_0=-\ln b$, 使得 $e^{f(x_0+1)-3x_0-2}+\frac{b}{2}x_0^2<1$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线