树德中学高2021级高二下期5月阶段性测试数学(文科)试题参考答案

一、选择题

$CBCDD\quad CACDA\quad CB$

二、填空题

13、$\dfrac{5}{2}$　14、8　15、$1-\dfrac{\pi}{12}$　16、$\left(\dfrac{3}{2},0\right)$

17、(1) 因为 $f(x)=x^3-x^2-x+c$.

从而 $f'(x)=3x^2-2x-1=3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)(x-1)$,

令 $f'(x)>0$, 得 $x<-\dfrac{1}{3}$ 或 $x>1$, 令 $f'(x)<0$, 得 $-\dfrac{1}{3}<x<1$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$ 和 $(1,+\infty)$; $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$; …… 6 分

(2) 函数 $g(x)=(f(x)-x^3)\cdot e^x=(-x^2-x+c)\cdot e^x$,

有 $g'(x)=(-2x-1)e^x+(-x^2-x+c)e^x=(-x^2-3x+c-1)e^x$,

因为函数在区间 $x\in[-3,2]$ 上单调递增,

等价于 $h(x)=-x^2-3x+c-1\geqslant 0$ 在 $x\in[-3,2]$ 上恒成立,

函数 $h(x)=-x^2-3x+c-1$ 的对称轴为: $x=-\dfrac{3}{2}$, 所以当 $x\in[-3,2]$ 时,

$h(x)_{\min}=h(2)$, 只要 $h(2)\geqslant 0$, 解得 $c\geqslant 11$, 所以 c 的取值范围是 $[11,+\infty)$. ………………… 12 分

18、(1) 因为抽取总问卷为100份, 所以 $n=100-(40+10+20)=30$.

年龄在 $[40,50)$ 中, 抽取份数为10份, 答对全卷人数为4人, 所以 $b=\dfrac{4}{10}=0.4$.

年龄在 $[50,60]$ 中, 抽取份数为20份, 答对的概率为0.1, 所以 $\dfrac{a}{20}=0.1$, 得 $a=2$.

根据频率直方分布图, 得 $(0.04+0.03+c+0.01)\times 10=1$, 解得 $c=0.02$. …… 6 分

(2) 因为年龄在 $[40,50)$ 与 $[50,60]$ 中答对全卷的人数分别为4人与2人.

年龄在 $[40,50)$ 中答对全卷的4人记为 a_1,a_2,a_3,a_4, 年龄在 $[50,60]$ 中答对全卷的2人记为 b_1,b_2,

则从这6人中随机抽取2人授予"环保之星"奖的所有可能的情况是: (a_1,a_2), (a_1,a_3), (a_1,a_4), (a_1,b_1), (a_1,b_2), (a_2,a_3), (a_2,a_4), (a_2,b_1), (a_2,b_2), (a_3,a_4), (a_3,b_1), (a_3,b_2), (a_4,b_1), (a_4,b_2), (b_1,b_2), 共15种.

其中所抽取年龄在 $[50,60]$ 的人中至少有1人被授予"环保之星"的情况是: (a_1,b_1), (a_1,b_2), (a_2,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_1), (a_3,b_2), (a_4,b_1), (a_4,b_2), (b_1,b_2) 共9种.

故所求的概率为 $\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$. ……………………………………………… 12 分

19. (1) $\because PA=AB=2$, 且 N 为 PB 中点, $\therefore AN\perp PB$,

又因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$, 且 $AD\subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA\perp AD$,

又因为 $AD\perp AB$ 且 $AB\cap PA=A$, 所以 $AD\perp$ 平面 PAB, 因为 $PB\subset$ 平面 PAB,

所以 $AD\perp PB$, 又因为 $AN\cap AD=A$, 所以 $PB\perp$ 平面 $ANMD$,

又因为 $DM\subset$ 平面 $ANDM$, 所以 $PB\perp DM$. …………………………………………… 6 分

(2) 由已知得, $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=2\sqrt{2}$,

同理可得 $PB=PD=BD=2\sqrt{2}$

$V_{P-BCD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCD}\times PA=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 1\times 2=\dfrac{2}{3}$,

设点 C 到平面 PBD 的距离 h,

则 $V_{C-PBD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle PBD}\times h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times h=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}h$,

由 $V_{P-BCD}=V_{C-PBD}$, 即 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}h$ 即点 C 到平面 PBD 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………… 12 分

20. (1) 设 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,

则 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$, 所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2}}$,

则 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2}=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$; ………………………………… 6 分

(2) 由 $\begin{cases}y=kx\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$ 可知, $(1+4k^2)x^2=4$, 所以 $x^2=\dfrac{4}{1+4k^2}$,

设直线 OA,OB 的方程分别为: $y=k_1x$, $y=k_2x$, 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$.

则 $x_1^2=\dfrac{4}{1+4k_1^2}$, $x_2^2=\dfrac{4}{1+4k_2^2}$, $\because k_1k_2=-\dfrac{1}{4}$,

所以 $S_{\triangle AOB}^2=\dfrac{1}{4}|x_1y_2-x_2y_1|^2=\dfrac{1}{4}x_1^2x_2^2(k_1-k_2)^2$

$=\dfrac{4(k_1-k_2)^2}{(1+4k_1^2)(1+4k_2^2)}=\dfrac{4(k_1^2+k_2^2-2k_1k_2)}{1+4(k_1^2+k_2^2)+16k_1^2k_2^2}=\dfrac{4\left(k_1^2+k_2^2+\frac{1}{2}\right)}{2+4(k_1^2+k_2^2)}=1$. ………………………… 12 分

21. (1) 设切点 $P(x_0,y_0)$, $f'(x)=3ax^2+1$,

则 $\begin{cases}y_0=ax_0^3+x_0\\y_0=2x_0-1\\3ax_0^2+1=2\end{cases}$, 解得, $\begin{cases}x_0=\frac{3}{2}\\a=\frac{4}{27}\end{cases}$, 所以 $a=\dfrac{4}{27}$. ………………………… 6 分

(2) 不等式 $2x-6a\sin x<f(x)$ 可化为: $\sin x>\dfrac{1}{6a}x-\dfrac{1}{6}x^3$, 设 $t=\dfrac{1}{6a}$,

令 $h(x)=\sin x-tx+\dfrac{1}{6}x^3$, 则 $h'(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2-t$,

令 $m(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2-t$, 则 $m'(x)=-\sin x+x$,

再令 $s(x)=-\sin x+x$, 则 $s'(x)=-\cos x+1\geqslant 0$,

所以 $s(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增, 又 $s(0)=0$, 则 $s(x)>0$, 即 $m'(x)>0$,

所以 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增, $y=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2(x>0)$ 的值域为 $(1,+\infty)$.

① 当 $t\leqslant 1$ 时, 即 $a\geqslant\dfrac{1}{6}$ 时, $m(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2-t\geqslant 0\Leftrightarrow h'(x)\geqslant 0$,

则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增, 又 $h(0)=0$, 所以 $h(x)>0$ 恒成立, 符合.

② 当 $t>1$ 时，即 $0<a<\frac{1}{6}$ 时

$m(0)=1-t<0$, 当 $x>2\sqrt{t+1}$ 时，$m(x)>0$, 所以存在 $x_0>0$, 使 $m(x_0)=0$,

则当 $x\in(0,x_0)$ 时，$m(x)<0$, 函数 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，而 $h(0)=0$,

所以 $h(x)<0$ 对 $x\in(0,x_0)$ 成立，不符合.

综上，实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{6},+\infty\right)$. ………………………… 12 分

22.(1) 直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=3$，

所以 $\frac{1}{2}\rho\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta=3$，即 $\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=3$，

因为 t 为参数，将 $y=-2\sqrt{3}+\frac{1}{2}t$ 代入上式得 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}t$，

所以直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=-2\sqrt{3}+\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）；………………………… 5 分

(2) 由 $\rho=4a\cos\theta(a>0)$，得 $\rho^2=4a\rho\cos\theta(a>0)$，

由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入，得 $x^2+y^2=4ax(a>0)$

将直线 l 的参数方程与 C 的直角坐标方程联立，得 $t^2-2\sqrt{3}(1+a)t+12=0$，

由 $\Delta=[2\sqrt{3}(1+a)]^2-4\times12=(1+a)^2-4>0$，解得 $a>1$，

设点 P 和点 Q 分别对应参数 t_1、t_2 为上述方程的根，

由韦达定理，$t_1+t_2=2\sqrt{3}(1+a)$，$t_1t_2=12$，

由题意得，$|PQ|^2=|t_1-t_2|^2=(t_1+t_2)^2-4t_1t_2=12(1+a)^2-48$，

$|MP|\cdot|MQ|=|t_1|\cdot|t_2|=|t_1t_2|=12$，

因为 $|PQ|^2=|MP|\cdot|MQ|$，所以 $12(1+a)^2-48=12$，

解得 $a=\sqrt{5}-1$，或 $a=-1-\sqrt{5}$，因为 $a>0$，所以 $a=\sqrt{5}-1$. ………………………… 10 分