2020级高三第二次模拟考试（数学）学科试卷

一、单项选择题（本题共8小题，每题5分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的．）

1. 设集合$P=\{y\mid y=\lg x\}$，集合$Q=\{x\mid y=\sqrt{2+x}\}$，则$P\cap(ð_RQ)=$

A. $[-2,0]$　　B. $(-\infty,0)$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2)$

【答案】D

【解析】

【详解】分析:先化简集合P和Q,再求$ð_RQ$和$P\cap\left(ð_RQ\right)$.

详解：由题得$P=R$,$Q=\{x\mid x\geq-2\}$，所以$ð_RQ$={x|x<-2}，

所以$P\cap\left(ð_RQ\right)=\left(-\infty,-2\right)$，故答案为D

点睛：(1）本题主要考查集合的化简和集合的运算，意在考查学生对这些基础知识的掌握能力.(2)本题是易错题，解答集合的题目时，首先要看集合“|”前集合元素的一般形式，本题

$P=\{y\mid y=\lg x\}$，表示的是函数的值域．集合$Q=\{x\mid y=\sqrt{2+x}\}$表示的是函数的定义域.

2. i为虚数单位，复数$z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$，复数$z$的共轭复数为$\bar{z}$，则$\bar{z}$的虚部为（　　）

A. -1　　B. -2　　C. $-2\mathrm{i}$　　D. $-\mathrm{i}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用复数的除法化简复数z，利用共轭复数的定义以及复数的概念可得结果.

【详解】因为$z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\dfrac{(2+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=\dfrac{5\mathrm{i}}{5}=\mathrm{i}$，故$\bar{z}=-\mathrm{i}$，

因此，$\bar{z}$的虚部为-1.

故选：A.

3. 已知向量$\vec{a}=(m,3)$，$\vec{b}=(1,m)$，若$\vec{a}$与$\vec{b}$方向相反，则$\left|\vec{a}-\sqrt{3}\vec{b}\right|=$（　　）

A. 54　　B. 48　　C. $3\sqrt{6}$　　D. $4\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】首先根据题意得到$m=-\sqrt{3}$，再求$\left|\vec{a}-\sqrt{3}\vec{b}\right|$即可.

【详解】向量$\vec{a}=(m,3)$，$\vec{b}=(1,m)$，若$\vec{a}$与$\vec{b}$方向相反，

所以$m^2-3=0$，解得$m=-\sqrt{3}$.

所以$\vec{a}-\sqrt{3}\vec{b}=\left(-\sqrt{3},3\right)-\left(\sqrt{3},-3\right)=\left(-2\sqrt{3},6\right)$，

$\left|\vec{a}-\sqrt{3}\vec{b}\right|=\sqrt{12+36}=4\sqrt{3}$.

故选：D

4. “中国剩余定理”又称“孙子定理”，最早可见于我国南北朝时期的数学著作《孙子算经》. 1852年，英国传教士伟烈亚力将该解法传至欧洲，1874年，英国数学家马西森指出此法符合1801年由高斯得到的关于同余式解法的一般性定理，因而西方称之为“中国剩余定理”．此定理讲的是关于整除的问题，现将1到2023这2023个数中，能被7除余1且被9除余1的数按从小到大的顺序排成一列，构成数列$\{a_n\}$，则该数列的和为（　　）

A. 30014　　　　B. 30016　　　　C. 33297　　　　D. 33299

【答案】C

【解析】

【分析】得到$a_n=63n-62$，从而得到$\{a_n\}$为等差数列，首项为1，公差为63，利用等差数列求和公式求出答案.

【详解】由已知可得a_n-1既能被7整除，又能被9整除，

故a_n-1能被63整除，所以$a_n-1=63(n-1)$，即$a_n=63n-62$，

所以$a_{n+1}-a_n=63(n+1)-62-(63n-62)=63$，

故$\{a_n\}$为等差数列，首项为1，公差为63，

由$1\le a_n\le 2023$可得：$1\le 63n-62\le 2023$，

因为$n\in N^*$，所以$1\le n\le 33$，$n\in N^*$，

故该数列的和为$33+\frac{33\times 32}{2}\times 63=33297$.

故选：C

5. 一个圆锥的侧面展开图是半径为1的半圆，则此圆锥的内切球的表面积为（　　）

A. π　　　　B. $\frac{\pi}{2}$　　　　C. $\frac{\pi}{3}$　　　　D. $\frac{\pi}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】由侧面展开图的半圆弧长等于圆锥底面圆周长可构造方程求得圆锥底面半径，由此可确定圆锥轴截面为正三角形，求得正三角形内切圆半径即为所求内切球半径，代入球的表面积公式即可得到结果.

【详解】设圆锥底面半径为r，则$2\pi r=\frac{1}{2}\times 2\pi\times 1=\pi$，解得：$r=\frac{1}{2}$；

$\therefore$圆锥的轴截面是边长为1的正三角形，

$\therefore$此正三角形内切圆的半径为$\frac{1}{3}\times\sqrt{1-r^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，即圆锥内切球半径$R=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

$\therefore$圆锥内切球的表面积$S=4\pi R^2=4\pi\times\frac{1}{12}=\frac{\pi}{3}$.

故选：C.

6. 已知$a=\cos 1$，$b=e^{\sin 1-1}$，$c=\frac{3}{4}$，则下列不等关系正确的是（　　）

A. $a<c<b$　　　　B. $a<b<c$　　　　C. $c<b<a$　　　　D. $c<a<b$

【答案】A

【解析】

【分析】构造$f(x)=e^x-x-1$，$x\in\mathbf{R}$，得到$e^{\sin 1-1}>\sin 1$，构造$t(x)=\sin x-x+\frac{1}{6}x^3$，$x>0$，多次求导得到$\sin 1>\frac{5}{6}$，从而得到$b=e^{\sin 1-1}>\frac{5}{6}$，再构造$g(x)=\cos x-\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4\right)$，$x>0$，多次求导后得到$\cos 1<\frac{13}{24}$，从而比较出大小.

【详解】设$f(x)=e^x-x-1$，$x\in\mathbf{R}$，

故$f'(x)=e^x-1$，当$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<0$，当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，

故$f(x)=e^x-x-1$在$x\in(-\infty,0)$上单调递减，在$x\in(0,+\infty)$上单调递增，

所以$f(x)\geq f(0)=0$，故$e^x\geq x+1$，当且仅当$x=0$时，等号成立，

因为$\sin 1-1\neq 0$，故$b=e^{\sin 1-1}>\sin 1-1+1=\sin 1$，

设$t(x)=\sin x-x+\frac{1}{6}x^3$，$x>0$，

则$t'(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$，$x>0$，

设$r(x)=t'(x)$，则$r'(x)=-\sin x+x$，$x>0$，

设$e(x)=r'(x)$，则$e'(x)=1-\cos x\geq 0$在$x>0$上恒成立，

故$r'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，则$r'(x)>r'(0)=0$，

故$t'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，则$t'(x)>t'(0)=0$，

故 $t(x)=\sin x-x+\frac{1}{6}x^3$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则 $t(x)>t(0)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $t(1)=\sin 1-1+\frac{1}{6}>0$，则 $\sin 1>\frac{5}{6}$，

故 $b=\mathrm{e}^{\sin 1-1}>\frac{5}{6}$，

设 $g(x)=\cos x-\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4\right)$，$x>0$，

故 $g'(x)=-\sin x-\left(-x+\frac{1}{6}x^3\right)$，$x>0$，

设 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=-\cos x+1-\frac{1}{2}x^2$，$x>0$，

设 $j(x)=h'(x)$，则 $j'(x)=\sin x-x$，$x>0$，

设 $k(x)=j'(x)$，则 $k'(x)=\cos x-1\le 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

故 $j'(x)=\sin x-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $j'(x)<j'(0)=0$，

故 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $h'(x)<h'(0)=0$，

故 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $g'(x)<g'(0)=0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $g(x)<g(0)=0$，

所以 $g(1)=\cos 1-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}\right)<0$，即 $\cos 1<\frac{13}{24}$，

又 $\cos 1<\frac{13}{24}<\frac{3}{4}<\frac{5}{6}<\mathrm{e}^{\sin 1-1}$，即 $a<c<b$.

故选：A

【点睛】方法点睛：麦克劳林展开式常常用于放缩法进行比较大小，常用的麦克劳林展开式如下：

$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^{n+1}\right)$，$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)$，

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$，

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o\left(x^{n+1}\right)$，

$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o\left(x^n\right)$，$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+o\left(x^2\right)$.

7. 直线l的方程为$(\lambda+2)x+(\lambda-1)y-3\lambda=0(\lambda\in\mathbf{R})$，当原点$O$到直线$l$的距离最大时，$\lambda$的值为（　　）

A. -1　　　　B. -5　　　　C. 1　　　　D. 5

【答案】B

【解析】

【分析】求出直线$(\lambda+2)x+(\lambda-1)y-3\lambda=0(\lambda\in\mathbf{R})$所过定点A的坐标，分析可知当$OA\perp l$时，原点$O$到直线$l$的距离最大，利用两直线垂直斜率的关系可求得实数$\lambda$的值.

【详解】直线方程$(\lambda+2)x+(\lambda-1)y-3\lambda=0(\lambda\in\mathbf{R})$可化为$\lambda(x+y-3)+(2x-y)=0$，

由$\begin{cases}x+y-3=0\\2x-y=0\end{cases}$可得$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$，

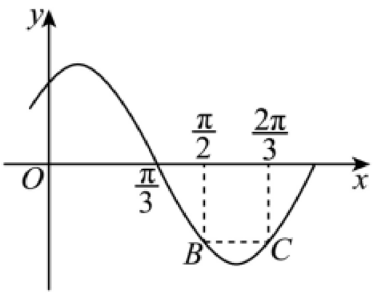
所以，直线$(\lambda+2)x+(\lambda-1)y-3\lambda=0(\lambda\in\mathbf{R})$过定点$A(1,2)$，

当$OA\perp l$时，原点O到直线l的距离最大，且$k_{OA}=2$，

又因为直线l的斜率为$k=-\frac{\lambda+2}{\lambda-1}=-\frac{1}{2}$，解得$\lambda=-5$.

故选：B.

8. 函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$的部分图象如图，$BC\,//\,x$轴，当$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时，不等式$f(x)\geq m-\sin 2x$恒成立，则$m$的取值范围是（　　）



A. $\left(-\infty,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　　　B. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　　　　C. $\left(-\infty,\sqrt{3}\right]$　　　　D. $(-\infty,1]$

【答案】A

【解析】

【分析】利用三角函数的图象性质和三角恒等变换求解.

【详解】因为$BC\,//\,x$轴，所以图象最低点的横坐标为$\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{7\pi}{12}$，

所以$\frac{1}{4}T=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$，所以$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$解得$\omega=2$，

又因为$f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\varphi\right)=-1$，

所以$\frac{7\pi}{6}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，即$\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，

又因为$0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$，

所以$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

由$f(x)\ge m-\sin 2x$可得$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\ge m-\sin 2x$，

即$\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\ge m-\sin 2x$也即$\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\ge m$，

令$g(x)=\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，所以$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以$g(x)\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right]$，

因为$g(x)\ge m$恒成立，所以$m\le\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选:A.

二、多项选择题：（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．）

9. 定义在 **R** 上的奇函数$f(x)$满足$f(x-3)=-f(x)$，当$x\in[0,3]$时，$f(x)=x^2-3x$，则下列结论正确的是（　　）

A. $f(x+6)=f(x)$　　　　B. $x\in[-6,-3]$时，$f(x)=x^2-3x-6$

C. $f(2021)+f(2023)=f(2022)$　　　　D. $\sum_{k=1}^{2023}f(k)=2$

【答案】AC

【解析】

【分析】根据函数的满足$f(x-3)=-f(x)$，可确定函数的周期性，从而可判断 A；结合周期性由$x\in[0,3]$时的解析式即可得$x\in[-6,-3]$时的解析式，从而可判断 B；根据函数周期性与对称性即可判断 C，D.

【详解】因为函数$f(x)$的$f(x-3)=-f(x)$，所以$f(x)=-f(x+3)$，则$f(x-3)=f(x+3)$，故函数$f(x)$的周期为6，所以$f(x+6)=f(x)$，故A正确；

又当$x\in[0,3]$时，$f(x)=x^2-3x$，则当$x\in[-6,-3]$时，$x+6\in[0,3]$，

$f(x)=f(x+6)=(x+6)^2-3(x+6)=x^2+9x+18$，故B不正确；

由周期可得$f(2021)=f(-1),f(2023)=f(1),f(2022)=f(0)$，又函数$f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数

$f(x)=-f(-x)$，

所以$f(0)=0,f(1)=-f(-1)$，即$f(1)+f(-1)=f(0)$，所以$f(2021)+f(2023)=f(2022)$，故C正确；

当$x\in[0,3]$时，$f(x)=x^2-3x$，所以$f(1)=-2,f(2)=-2,f(3)=0$，又因为$f(x)=-f(-x)$，所以

$f(4)=-f(-4)=-f(2)=2,f(5)=-f(-5)=-f(1)=2$，$f(6)=f(0)=0$，

则$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=0$，所以

$\sum\limits_{k=1}^{2023}f(k)=337\sum\limits_{k=1}^{6}f(k)+f(1)=337\times0-2=-2$，故D不正确.

故选：AC.

10. 已知数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_na_{n+1}=2^{2n-1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，$\{a_n\}$的前$n$项的和为$S_n$，前$n$项的积为$T_n$，则下列结论正确的是（　　）

A. $a_3=2$　　B. $\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=4$　　C. $S_n=2^n-1$　　D. $T_{2n}=2^{n(2n-1)}$

【答案】BCD

【解析】

【分析】令$n=1$可求得a_2的值，推导出$\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=4$，分析可知数列$\{a_n\}$中的奇数项和偶数项分别成以4为公比的等比数列，求出数列$\{a_n\}$的通项公式，逐项判断可得出合适的选项.

【详解】数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_na_{n+1}=2^{2n-1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，

当$n=1$时，则有$a_1a_2=2$，可得$a_2=2$，

当$n\geq2$时，由$a_na_{n+1}=2^{2n-1}$可得$a_{n-1}a_n=2^{2n-3}$，

上述两个等式相除可得$\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=4$，B对；

所以，数列$\{a_n\}$中的奇数项和偶数项分别成以4为公比的等比数列，

当n为奇数时，设$n=2k-1\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$，则$a_n=a_{2k-1}=a_1\cdot 4^{k-1}=2^{2k-2}=2^{n-1}$，

当n为偶数时，设$n=2k\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$，则$a_n=a_{2k}=a_2\cdot 4^{k-1}=2^{2k-1}=2^{n-1}$，

故对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=2^{n-1}$，所以，$a_3=2^2=4$，A 错；

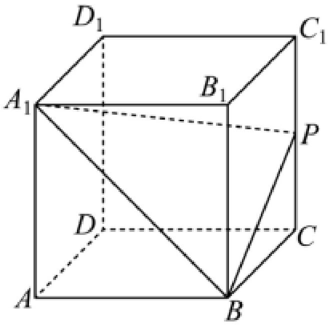
$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^n}{2^{n-1}}=2$，所以数列$\{a_n\}$为等比数列，且该数列的首项为1，公比为2，

则$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，C 对；

$T_{2n}=a_1a_2a_3\cdots a_{2n}=2^{0+1+2+\cdots+(2n-1)}=2^{\frac{(2n-1)\cdot 2n}{2}}=2^{n(2n-1)}$，D 对.

故选：BCD.

11. 直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$为菱形，$\angle BAD=60^\circ$，$AB=AD=AA_1=2$，P为CC_1中点，点Q在四边形CDD_1C_1内（包括边界）运动，下列结论正确的是（　　）



A. 若$\overrightarrow{DQ}=\lambda\overrightarrow{DC}+\mu\overrightarrow{DD_1}$，且$\lambda+\mu=\frac{1}{2}$，则四面体$A_1BPQ$的体积为定值

B. 若AQ // 平面A_1BP，则AQ的最小值为$\sqrt{5}$

C. 若$\triangle A_1BQ$的外心为O，则$\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{A_1O}$为定值 2

D. 若$A_1Q=\sqrt{7}$，则点Q的轨迹长度为$\frac{\pi}{3}$

【答案】AB

【解析】公众号：高中试卷君

【分析】对于 A，取DD_1,DC的中点分别为M,N，，由条件确定Q的轨迹，结合锥体体积公式判断 A；对于 B，由面面平行的判定定理可得平面A_1BP // 平面AMN，从而可得AQ // 平面A_1BP，进而可求得AQ的最小值；对于 C，由三角形外心的性质和向量数量积的性质可判断，对于 D，由条件确定点Q的轨迹为圆弧A_2A_3，利用弧长公式求轨迹长度即可判断.

【详解】对于 A，取DD_1,DC的中点分别为M,N，连接AM,AN,MN,DQ，则$\overrightarrow{DD_1}=2\overrightarrow{DM}$，$\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DN}$，

$MN//D_1C$，

因为$\overrightarrow{DQ}=\lambda\overrightarrow{DC}+\mu\overrightarrow{DD_1}$，$\lambda+\mu=\dfrac{1}{2}$，所以$\overrightarrow{DQ}=2\lambda\overrightarrow{DN}+2\mu\overrightarrow{DM}$，$2\lambda+2\mu=1$，

所以Q,M,N三点共线，所以点Q在MN，因为$D_1C//A_1B$，$MN//D_1C$，

所以$MN//A_1B$，$MN\not\subset$平面A_1BP，$A_1B\subset$平面A_1BP，所以$MN//$平面A_1BP，

所以点Q到平面A_1BP的距离为定值，因为$\triangle A_1BP$的面积为定值，

所以四面体A_1BPQ的体积为定值，所以 A 正确；

对于 B，因为$AM//BP$，因为$AM\not\subset$平面A_1BP，$BP\subset$平面A_1BP，

所以$AM//$平面A_1BP，又$AQ//$平面A_1BP，$AQ\cap AM=M$，$AQ,AM\subset$平面AMQ，

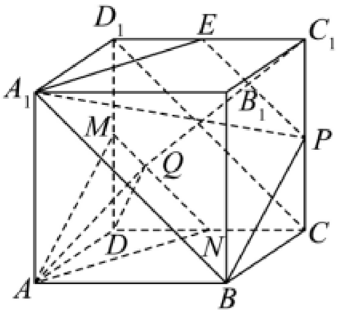
所以平面$AMQ//$平面A_1BP，取D_1C_1的中点E，连接PE，则$PE//D_1C$，$D_1C//A_1B$，

所以$PE//A_1B$，所以A_1,B,P,E四点共面，所以平面$AMQ//$平面A_1BPE，

即Q在MN上，当$AQ\perp MN$时，AQ取最小值，

因为$\angle BAD=60^\circ,AB=AD=AA_1=2$，所以$AM=\sqrt{5},MN=\sqrt{2}$，

$AN=\sqrt{AD^2+DN^2-2AD\cdot DN\cos 120^\circ}=\sqrt{4+1-2\times2\times1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\sqrt{7}$，所以$AM^2+MN^2=AN^2$，所以$Q,M$重合，所以$AQ$的最小值为$\sqrt{5}$，所以 B 正确；



对于 C，若$\triangle A_1BQ$的外心为O，过O作$OH\perp A_1B$于H，

因为$\left|\overrightarrow{A_1B}\right|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

所以$\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{A_1O}=\overrightarrow{A_1B}\cdot\left(\overrightarrow{A_1H}+\overrightarrow{HO}\right)=\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{A_1H}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{A_1B}^2=4$，所以 C 错误；