高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $z=\frac{1+i}{i}$，则 $|\bar{z}(z+2i)|=$

A. 2　　B. 3　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{3}$

2. 设集合 $A=\{x|x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x|2^x\geq 1\}$，则 $A\cup B=$

A. $(-1,3)$　　B. $(0,3)$　　C. $(-1,+\infty)$　　D. $(-1,0)$

3. 已知双曲线 $C:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm 2\sqrt{2}x$，则 C 的离心率 $e=$

A. 3　　B. $\frac{3}{4}\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

4. 已知 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，则 $\cos 2\alpha=$

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 若一个二面角的两个半平面分别垂直于另一个二面角的两个半平面，则这两个二面角的大小关系是

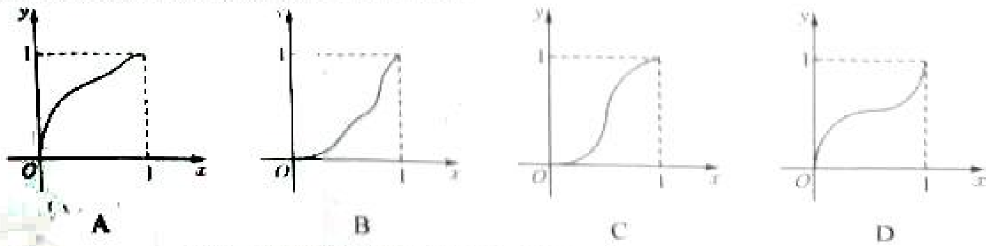
A. 相等　　B. 互补

C. 相等或互补　　D. 不确定

6. 已知 $a=\log_3 2$，$b=\sin 2$，$c=e^{0.2}$，则

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $b<a<c$　　D. $c<a<b$

7. 函数 $y=f(x)(x\in[0,1])$ 对任意 $a_1\in(0,1)$，由 $a_{n+1}=f(a_n)(n\in N^*)$ 得到的数列 $\{a_n\}$ 均是单调递增数列，则下列图象对应的函数符合上述条件的是



8. 已知抛物线 C 的焦点为 F，点 A,B 在抛物线上，过线段 AB 的中点 M 作抛物线 C 的准线的垂线，垂足为 N，以 AB 为直径的圆过点 F，则 $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 从装有 2 个白球和 3 个红球的袋子中任取 2 个球，则

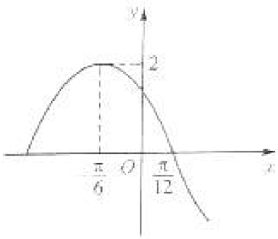
A. “都是红球”与“都是白球”是互斥事件

B. “至少有一个红球”与“都是白球”是对立事件

C. “恰有一个白球”与“恰有一个红球”是互斥事件

D. “至少有一个红球”与“至少有一个白球”是互斥事件

10. 函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则



A. $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，若 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M$ 恒成立，则 $M\geqslant 4$

B. 若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1+x_2=k\pi-\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$

C. 若 $x_1+x_2=\frac{\pi}{6}$，则 $f(x_1)+f(x_2)=0$

D. 若 $x_1,x_2\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{7}{12}\pi\right)$，且 $f(x_1)=f(x_2)(x_1\neq x_2)$，则 $f(x_1+x_2)=1$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=3$，$a_n\cdot a_{n+1}=3^n(n\in\mathbf{N}^*)$，$S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则

A. $\{a_n\}$ 是等比数列

B. $\{a_{2n}\}$ 是等比数列

C. $S_{2\,022}=2(3^{1\,011}-1)$

D. $\{a_n\}$ 中存在不相等的三项构成等差数列

12. 若动直线 $l:mx-y+4-4m=0$ 与圆 $C:(x-4)^2+(y-5)^2=9$ 相交于 A,B 两点，则

A. $|AB|$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$

B. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的最大值为 -7

C. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$（$O$ 为坐标原点）的最大值为 78

D. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的最大值为 18

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $(x+2y)(x-y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为________.

14. 已知 6 个正整数，它们的平均数是 5，中位数是 4，唯一的众数是 3，则这 6 个数的极差最大时，方差的值是________.

15. 表面积为 Q 的多面体的每一个面都与体积为 36π 的球相切，则这个多面体的体积为________.

16. 已知函数 $f(x)=(a-1)x^2+(a+2)x\ln x+\ln^2 x$ 有 3 个不同的零点，则实数 a 的取值范围是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

设正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$ 且 $a_n=\dfrac{2}{3S_n-2a_n-S_{n-1}}$（$n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geqslant 2$）.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若 $b_n=\dfrac{1}{S_{n+1}+S_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

18.（本小题满分 12 分）

记△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $b^2+c^2-a^2=2ab\sin C$.

(1)求角 A；

(2)若 $AB=3\sqrt{2}$，$AC=3$，点 P 在线段 BC 上，且 $CP=\dfrac{1}{3}CB$，Q 是线段 AC 中点，AP 与 BQ 交于点 M，求 $\cos\angle AMB$.

19.（本小题满分 12 分）

第 24 届冬季奥林匹克运动会在首都北京举办，北京成为世界上唯一一个双奥之城. 为了让更多青少年参与、热爱冰雪运动，某调研机构在全市学生中组织了一次冬奥会相关知识竞赛，并随机抽取 20 名参赛学生的成绩制成如下频数分布表：

得分	(60,70]	(70,80]	(80,90]	(90,100]
频数	4	5	7	4

规定得分在(70,80]为“中等”，得分在(90,100]为“优秀”.

(1)从“中等”和“优秀”两组学生中随机抽取 4 名学生，求恰有 2 人是“中等”的概率；

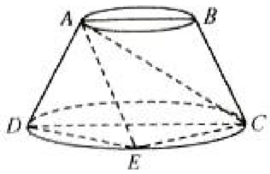
(2)将 20 名参赛学生的频率视为概率. 现从参赛学生中随机抽取 4 人，记得分为“优秀”的人数为 X，求随机变量 X 的分布列和数学期望.

20.(本小题满分 12 分)

如图，AB,CD 分别是圆台上、下底面的直径，且 $AB /\!/ CD$，点 E 是下底面圆周上一点，$AB=2\sqrt{2}$，圆台的高为 $\sqrt{14}$.

(1)证明：不存在点 E 使平面 $AEC\perp$ 平面 ADE；

(2)若 $DE=CE=4$，求二面角 $D-AE-B$ 的余弦值.



21.(本小题满分 12 分)

已知 $f(x)=x^2-x\ln x$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

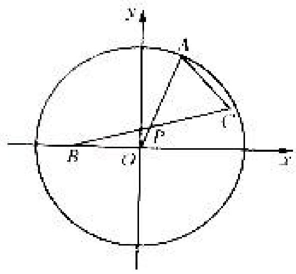
(2)当 $a\in(0,2e)$ 时，证明：$2x^2-(2x+a)\ln x>0$.

22.(本小题满分 12 分)

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $B(-2,0)$，点 A 在圆 O：$x^2+y^2=9$ 上运动，点 C 满足：线段 BC 的中点 P 在线段 OA 上，且 $PB=PA$. 设 C 点的轨迹为 E.

(1)求 E 的方程；

(2)设 E 与 x 轴的交点分别为 J,K,J 在 K 的左边，过 $D(-1,0)$ 与 y 轴不垂直的直线 l 交 E 于 M,N 两点，若直线 JM,KN 的斜率分别为 k_1,k_2，求证：$\frac{k_1}{k_2}$ 为定值.



高三数学参考答案、提示及评分细则

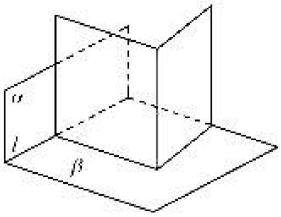
1. A　$z=\frac{1+i}{i}=1-i$，所以 $|\bar{z}(z+2i)|=|2i|=2$. 故选 A.

2. C　$A=(-1,3)$，$B=(0,+\infty)$，则 $A\cup B=(-1,+\infty)$. 故选 C.

3. B　由题意可知 $\frac{a}{b}=2\sqrt{2}$，所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 故选 B.

4. D　法 1：由 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，得 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，两边平方得 $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$，即 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，由 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，再结合 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的和为正且积为负，可得 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$，所以 $\sin 2\alpha=-\frac{1}{2}$，$\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.

法 2：由 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，得 $\alpha-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$；再由 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，得 $\alpha-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}$，所以 $\alpha=-\frac{\pi}{12}$，从而 $\cos 2\alpha=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.



5. D　如图所示，当其中一个二面角的棱垂直于另一个二面角的一个半平面 β 时，二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小可以任意改变，这两个二面角的大小关系不确定. 故选 D.

6. B　$a=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$，$c=e^{-\ln 2}=\frac{1}{2}$，因为 $\frac{\pi}{2}<2<\frac{5\pi}{6}<\pi$，函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递减，所以 $\sin 2>\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$，即 $\sin 2>\frac{1}{2}>\log_5 2$. 故选 B.

7. A　因为 $a_{n+1}=f(a_n)$，所以点 (a_n,a_{n+1}) 在函数 $y=f(x)$ 的图象上，又 $\{a_n\}$ 单调递增，$a_{n+1}>a_n$，即 $f(a_n)>a_n$，所以点 $(a_n,a_{n+1})(n\in\mathbf{N}^*)$ 始终在直线 $y=x$ 的上方，对照四个选项，只有 A 符合. 故选 A.

8. C　设 $|AF|=a$，$|BF|=b$，则 $|MN|=\frac{a+b}{2}$，$|AB|=\sqrt{a^2+b^2}$，$\frac{|MN|}{|AB|}=\frac{\frac{a+b}{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a+b}{2\sqrt{a^2+b^2}}$，$\left(\frac{|MN|}{|AB|}\right)^2=\frac{a^2+b^2+2ab}{4(a^2+b^2)}=\frac{1}{4}+\frac{ab}{2(a^2+b^2)}\leqslant\frac{1}{2}$（当且仅当 $a=b$ 且 $AF\perp BF$ 时取等号），即 $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.

9. AB　"都是红球"与"都是白球"不能同时发生，是互斥事件，故 A 正确；"至少有一个红球"与"都是白球"是对立事件，故 B 正确；"恰有一个白球"与"恰有一个红球"是相等事件，非互斥，故 C 错误；"至少有一个红球"与"至少有一个白球"可能同时发生，非互斥，故 D 错误. 故选 AB.

10. ACD　易求得 $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，若 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M$ 恒成立，即 $f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=4\leqslant M$，故 A 正确；若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $\cos\left(2x_1+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x_2+\frac{\pi}{3}\right)$，则 $2x_1+\frac{\pi}{3}=\left(2x_2+\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi$，或 $2x_1+\frac{\pi}{3}+\left(2x_2+\frac{\pi}{3}\right)=2k\pi$，这里 $k\in\mathbf{Z}$，解得 $x_1-x_2=k\pi$，或 $x_1+x_2=k\pi-\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$. 故 B 错误；若 $x_1+x_2=\frac{\pi}{6}$，则 $f(x_1)+f(x_2)=f\left(\frac{\pi}{6}-x_2\right)+f(x_2)$，由 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$ 对称，得 $f\left(\frac{\pi}{6}-x_2\right)+f(x_2)=0$，故 C 正确；若 $x_1,x_2\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{7}{12}\pi\right)$，且 $f(x_1)=f(x_2)(x_1\neq x_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{2}{3}\pi$，所以 $f(x_1+x_2)=f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=2\cos\frac{5}{3}\pi=1$，故 D 正确. 故选 ACD.

11. BC　由已知，得 $a_1\cdot a_2=3$，所以 $a_1=1$，由 $a_n\cdot a_{n+1}=3^n(n\in\mathbf{N}^*)$，得 $\begin{cases}a_n\cdot a_{n+1}=3^n,\\a_{n+1}\cdot a_{n+2}=3^{n+1},\end{cases}$ 所以 $\frac{a_{n+2}}{a_n}=3$，所有奇数项构成等比数列，所有偶数项也构成等比数列，公比均为 3. 数列 $\{a_n\}$：1，3，3，9，9，…，故 A 错误，B 正确；$S_{2\,022}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2\,021}+a_{2\,022}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2\,021})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2\,022})=\frac{1(3^{1\,011}-1)}{3-1}+\frac{3(3^{1\,011}-1)}{3-1}=2(3^{1\,011}-1)$，故 C 正确；假设 3^{p-1}，3^{q-1}，$3^{r-1}(p<q<r)$ 三项构成等差数列，则 $3^{p-1}+3^{r-1}=2\times3^{q-1}$，整理得 $3^{q-p}(2-3^{r-q})=1$，因为 $r-q\geqslant1$，$q-p\geqslant1$，该式显然不成立，故 D 错误. 故选 BC.

12. AB　直线 l 恒过点 $M(4,1)$，点 M 在圆 C 内.

对于 A，当 $MC\perp AB$ 时，$|AB|$ 取最小值，所以 $|AB|_{\min}=2\sqrt{|CA|^2-|CM|^2}=4\sqrt{2}$，故 A 正确；

对于 B，$\vec{CA}\cdot\vec{CB}=|\vec{CA}|\cdot|\vec{CB}|\cos\angle ACB$，易知 $CM\perp AB$ 时，$\angle ACB$ 最小，此时 $(\cos\angle ACB)_{\max}=\frac{3^2+3^2-(4\sqrt{2})^2}{2\times3\times3}$

$=-\frac{7}{9}$，所以$(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB})_{\max}=3\cdot3\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)=-7$，故 B 正确；

对于 C，设 AB 中点为 D，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{OD}^2-\overrightarrow{DA}^2$，而点 D 在以 MC 为直径的圆$(x-4)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$上. 设 $D(x,y)$，则$\begin{cases}x=4+\frac{1}{2}\cos\theta,\\ y=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta\end{cases}\left(\theta\in[0,2\pi),\theta\neq\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{OD}^2-\overrightarrow{DA}^2=|OD|^2-(|CA|^2-|CD|^2)=|OD|^2+|CD|^2-9=\left(4+\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2-9=28+4\cos\theta+4\sin\theta=28+4\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant28+4\sqrt{2}$. 故 C 错误；

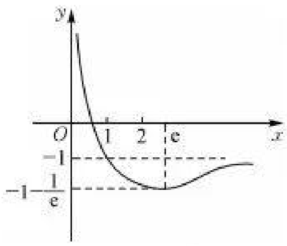
对于 D，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\angle CAB=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$，当 AB 过圆心 C 时最大，但动直线 $l:mx-y+4-4m=0$ 不包括垂直于 x 轴的直线，所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$的最大值不存在. 故 D 错误. 故选 AB.

13. 10　因为$(x)\cdot C_5^3x^2(-y)^3=-10x^3\cdot y^3$，$(2y)\cdot C_5^2x^3(-y)^2=20x^3y^3$，所以 x^3y^3 的系数为 10.

14. $\frac{37}{3}$　因为 6 个正整数，它们的平均数是 5，中位数是 4，唯一的众数是 3，要使这 6 个数极差最大，所以最小数是 1，若 6 个数中有 3 个 3，则设数据为 1，3，3，3，d，e，不满足中位数是 4；若数据中只有 2 个 3，设这 6 个数为 1，3，3，5，b，c，且 $b+c=18$，又仅有一个众数 3，所以 $b>5$，且 $b\in\mathbf{N}^*$，所以 $b=6$ 时，c 最大，极差最大，此时$c=18-b=12$，所以方差为 $\frac{1}{6}[(1-5)^2+(3-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(12-5)^2]=\frac{37}{3}$.

15. Q　因为球的体积为 36π. 设球的半径为 R，则$\frac{4\pi R^3}{3}=36\pi$，解得 $R=3$. 因为表面积为 Q 的多面体的每一个面都与体积为 36π 的球相切，所以球心到多面体各个面的距离相等且等于球的半径. 所以多面体的体积为$\frac{1}{3}Q\times3=Q$.

16. $\left(-1-\frac{1}{e},-1\right)$　$f(x)=(a+1)x^2+(a+2)x\ln x+\ln^2x$ 有 3 个不同零点，即方程$[(a+1)x+\ln x](x+\ln x)=0$ 有 3 个不同的根，易知方程 $x+\ln x=0$ 有唯一一个根 $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，显然 $a=0$ 时不适合，则 $ax_0+x_0+\ln x_0\neq0$，则方程 $ax+x+\ln x=0$ 有 2 个不同的根即可，即方程$a=-1-\frac{\ln x}{x}$有 2 个不同的根，也即直线 $y=a$ 与曲线 $y=-1-\frac{\ln x}{x}$有 2 个不同交点. 令 $g(x)=-1-\frac{\ln x}{x}$，易知 $g(x)$在$(0,e)$上单调递减，在$(e,+\infty)$上单调递增，$g(x)_{\min}=-1-\frac{\ln e}{e}=-1-\frac{1}{e}$，并且当 $x\to0$ 时，$g(x)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$时，$g(x)\to-1$. 画出 $g(x)$图象如下：



由图可知，$a\in\left(-1-\frac{1}{e},-1\right)$. 故实数 a 的取值范围$\left(-1-\frac{1}{e},-1\right)$.

17. 解：(1)当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=\frac{2}{3S_n-2a_n-S_{n-1}}=\frac{2}{3S_n-2(S_n-S_{n-1})-S_{n-1}}=\frac{2}{S_n+S_{n-1}}$，

即$(S_n-S_{n-1})\cdot(S_n+S_{n-1})=2$，所以 $S_n^2-S_{n-1}^2=2$. ………… 2 分

又 $S_1^2=a_1^2=1$，所以$\{S_n^2\}$是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，故 $S_n^2=2(n-1)+1=2n-1$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-3}$； ………… 3 分

当 $n=1$，$a_1=1$ 不符合上式. ………… 4 分

所以 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\ \sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-3},n\geqslant2.\end{cases}$ ………… 5 分

(2)由题意，得 $b_n=\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}(n\geqslant1)$，………… 7 分

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\cdots+\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}=\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$. ………… 10 分

18. 解：(1)由余弦定理，得 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A=2ab\sin C$，所以 $c\cos A=a\sin C$. ………………………… 2 分

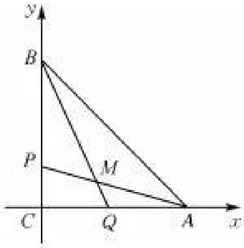
再由正弦定理，得 $\sin C\cos A=\sin A\sin C$. ………………………… 4 分

因为 $\sin C\neq 0$，所以 $\tan A=1$，又 A 是三角形内角，所以 $A=\frac{\pi}{4}$. ………………………… 5 分

(2)由余弦定理，得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A=18+9-2\times 3\sqrt{2}\times 3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=9$，

所以 $BC=3$. ………………………… 7 分

因为 $BC^2+AC^2=3^2+3^2=(3\sqrt{2})^2=AB^2$，所以 $C=\frac{\pi}{2}$.



以 CA 为 x 轴，CB 为 y 轴建立平面直角坐标系，则 $P(0,1)$，$Q\left(\frac{3}{2},0\right)$，$A(3,0)$，$B(0,3)$，所以

$\overrightarrow{PA}=(3,-1)$，$\overrightarrow{QB}=\left(-\frac{3}{2},3\right)$. ………………………… 10 分

$\angle AMB$ 即为 $\overrightarrow{PA}$ 与 $\overrightarrow{QB}$ 的夹角，来源微信公众号：高三答案

所以 $\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QB}}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{QB}|}=\frac{3\times\left(-\frac{3}{2}\right)+(-1)\times 3}{\sqrt{10}\times\sqrt{\frac{9}{4}+9}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………………… 12 分

法二：用解三角形相关知识，求出 $\angle ABM$，$\angle BAM$ 的正、余弦值，然后利用内角和为 π 转化即可.

19. 解：(1)从“中等”“优秀”两组学生中随机抽 4 名学生，恰有 2 人是“中等”为事件 A，

则 $P(A)=\frac{C_5^2\cdot C_4^2}{C_9^4}=\frac{10}{21}$. ………………………… 4 分

(2)由题意可知，X 的可能取值为 0，1，2，3，4.

得分为“优秀”的概率 $P_1=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$，得分不是“优秀”的概率 $P_2=1-P_1=\frac{4}{5}$，X 服从二项分布 $B\left(4,\frac{1}{5}\right)$. ……… 6 分

$P(X=0)=C_4^0\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{256}{625}$，$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{256}{625}$，

$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{96}{625}$，$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^1=\frac{16}{625}$，

$P(X=4)=C_4^4\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^0=\frac{1}{625}$.

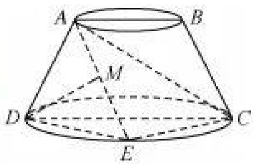
X 的分布列如下：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{1}{625}$

………………………… 10 分

故 $E(X)=4\times\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$. ………………………… 12 分

20. (1)证明：假设存在点 E 使平面 $AEC\perp$ 平面 ADE，显然 E 异于 D 或 C.



$\because CD$ 是底面圆的直径，$\therefore CE\perp DE$. ………………………… 1 分

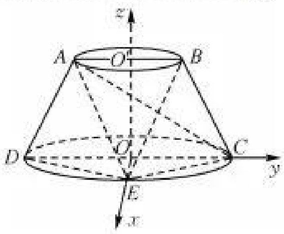
在平面 ADE 中，过点 D 作 $DM\perp AE$，垂足为 M，$\because$ 平面 $AEC\perp$ 平面 ADE，平面 $AEC\cap$ 平面 $ADE=AE$，$\therefore DM\perp$ 平面 ACE. $CE\subset$ 平面 ACE，$\therefore DM\perp CE$. ………………………… 3 分

又 $DM\cap DE=D$，DM，$DE\subset$ 平面 ADE，$\therefore CE\perp$ 平面 ADE. ………………………… 4 分

$\because AD\subset$ 平面 ADE，$\therefore CE\perp AD$. 设上、下底面的圆心分别为 O'，O，则 $O'O\perp CE$，又 AD，$O'O$ 相交，所以 $CE\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore CE\perp CD$，从而 $DE/\!/CD$，这是不可能的，故假设不成立，

即不存在点 E 使平面 $AEC\perp$ 平面 ADE. ………………………… 6 分

(2)解：设圆台上下底面圆的圆心分别为 O'，O，如图，分别以 OE，OC，OO' 所在直线为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系，



由 $DE=CE=4$，得 $CD=4\sqrt{2}$，则 $E(2\sqrt{2},0,0)$，$D(0,-2\sqrt{2},0)$，$A(0,-\sqrt{2},\sqrt{14})$，$B(0,\sqrt{2},\sqrt{14})$，$\therefore\overrightarrow{EA}=(-2\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{14})$，$\overrightarrow{DA}=(0,\sqrt{2},\sqrt{14})$，$\overrightarrow{AB}=(0,2\sqrt{2},0)$.

设平面 ADE 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{EA}\cdot\boldsymbol{m}=-2\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+\sqrt{14}z=0,\\ \overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{m}=\sqrt{2}y+\sqrt{14}z=0.\end{cases}$

令 $z=1$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{7},-\sqrt{7},1)$； ………………………… 8 分

同理得平面 ABE 的法向量 $\boldsymbol{n}=\left(-\frac{\sqrt{7}}{2},0,-1\right)$, ………………………… 10 分

$\therefore\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=-\frac{3\sqrt{165}}{55}$. 来源微信公众号：高三答案

设二面角 $D-AE-B$ 的大小为 θ，由图可知 θ 为钝角，故所求二面角的余弦值为 $-\frac{3\sqrt{165}}{55}$. ………………………… 12 分

21. (1)解：$f'(x)=2x-1-\ln x$，$f'(1)=1$，$f(1)=1$，

所以所求切线方程为 $y-1=1\cdot(x-1)=x-1$，即 $y=x$. ………………………… 4 分

(2)证明：x 的取值范围为 $(0,+\infty)$，

由 $2x^2-(2x+a)\ln x>0$，整理得 $x-\ln x>\frac{a\ln x}{2x}$. ………………………… 6 分

令 $g(x)=x-\ln x$，则 $g'(x)=\frac{x-1}{x}$，由 $g'(x)<0$ 得 $0<x<1$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；由 $g'(x)>0$ 得 $x>1$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)\geqslant g(1)=1$. ………………………… 8 分

令 $h(x)=\frac{a\ln x}{2x}$，$h'(x)=\frac{a(1-\ln x)}{2x^2}$，因为 $a\in(0,2e)$，易得 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h(x)\leqslant h(e)=\frac{a}{2e}<1$， ………………………… 10 分

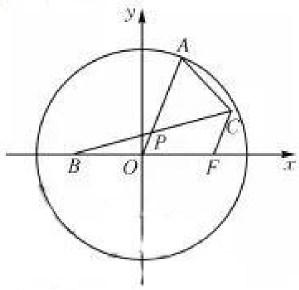
所以 $g(x)>h(x)$ 恒成立，即 $x-\ln x>\frac{a\ln x}{2x}$ 恒成立，

所以当 $a\in(0,2e)$ 时，$2x^2-(2x+a)\ln x>0$. ………………………… 12 分

22. (1)解：因为 $|PA|=|PB|$，所以 $|OP|+|PB|=|OA|=3$. ………………………… 1 分

设 $F(2,0)$，连接 CF，则 O 为 BF 的中点，所以 $|CB|+|CF|=2|BP|+2|OP|=6>|BF|=4$，

根据椭圆的定义可知点 C 的轨迹 E 是以 B,F 为焦点，长轴长为 6 的椭圆. ……… 3 分



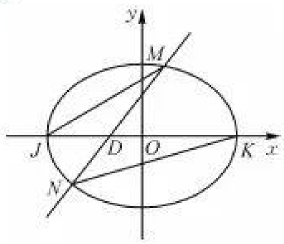
设 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，其中 $a=3$，$b=\sqrt{a^2-2^2}=\sqrt{5}$，

所以轨迹 E 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. ………………………… 5 分

(2)证明：当 l 的斜率存在时，设 $l:y=k(x+1)(k\neq0)$.

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1,\\ y=k(x+1),\end{cases}$ 化简得 $(9k^2+5)x^2+18k^2x+9k^2-45=0$.

因为点 $D(-1,0)$ 在椭圆内部，则直线 l 与 E 一定交于 M,N 两点，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，



则 $x_1+x_2=-\frac{18k^2}{9k^2+5}$，$x_1x_2=\frac{9k^2-45}{9k^2+5}$. ………………………… 6 分

而 $J(-3,0)$，$K(3,0)$，

则直线 JM 的斜率 $k_1=\frac{y_1}{x_1+3}$，直线 KN 的斜率 $k_2=\frac{y_2}{x_2-3}$，

所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{y_1}{x_1+3}}{\frac{y_2}{x_2-3}}=\frac{k(x_1+1)(x_2-3)}{k(x_2+1)(x_1+3)}=\frac{x_1x_2+x_2-3x_1-3}{x_1x_2+x_1+3x_2+3}$

$$=\frac{\frac{9k^2-45}{9k^2+5}+x_2-3\left(-\frac{18k^2}{9k^2+5}-x_2\right)-3}{\frac{9k^2-45}{9k^2+5}+\left(-\frac{18k^2}{9k^2+5}-x_2\right)+3x_2+3}$$

$$=\frac{\frac{12(3k^2-5)}{9k^2+5}+4x_2}{\frac{6(3k^2-5)}{9k^2+5}+2x_2}=2;$$ ………………………… 10 分

当 l 的斜率不存在时，可得点 $M\left(-1,\frac{2}{3}\sqrt{10}\right)$，$N\left(-1,-\frac{2}{3}\sqrt{10}\right)$，或 $N\left(-1,\frac{2}{3}\sqrt{10}\right)$，$M\left(-1,-\frac{2}{3}\sqrt{10}\right)$.

经验证，均有 $\frac{k_1}{k_2}=2$. ………………………… 11 分

综上，$\frac{k_1}{k_2}$ 为定值 2. ………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。